VÕ ĐẠI MAU

PHÉP DỜI HÌNH TRONG MẶT PHẲNG

Lớp 11

BAN KHOA HỌC TỰ NHIÊN

* Luyện thi vào Đại học, Cao đẳng và THCN
* Thi Olympic Quốc gia

(TỰ LUẬN & TRẮC NGHIỆM)

ĐHQG HÀ NỘI NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

VÕ ĐẠI MAU

PHÉP DỜI HÌNH *trong* MẶT PHẲNG

Lớp 11

BAN KHOA HỌC TỰ NHIÊN

- Luyện thi vào Đại học, Cao đẳng và THCN
- Thi Olympic Quốc gia

(TỰ LUẬN & TRẮC NGHIỆM)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Lời nói đầu

Kể từ năm học 2007 – 2008, chương trình phân ban lớp 11 sẽ áp dụng đại trà trên cả nước.

Cũng như các cấp lớp khác, chương trình toán lớp 11 có nhiều đổi mới. Trong phân môn Hình học lớp 11 có phần "*Các phép dời hình trong mặt phẳng*".

Theo quan điểm toán học trên thế giới thì cần phải phân biệt phép biến hình và phép dời hình.

+ Phép biến hình là một qui tắc biến đổi một hình (F) đã cho thành một hình (F') mà không bắt buộc phải bảo toàn độ lớn của hình.

  Thí dụ: Phép vị tự, phép đồng dạng, phép nghịch đảo... là những phép biến hình.

+ Phép dời hình là một phép biến hình đặc biệt, biến đổi một hình (F) đã cho thành một hình (F') mà không làm thay đổi các khoảng cách giữa hai điểm cho trước của hình.

  Thí dụ: Phép tịnh tiến, phép đối xứng, phép quay.

Dĩ nhiên các phép tịnh tiến, đối xứng, quay cũng là những phép biến hình nhưng các phép biến đổi như phép vị tự, phép đồng dạng, phép nghịch đảo,... không phải là những phép dời hình.

Dù thận trọng đến đâu vẫn có thể có sai sót – những sai sót ngoài ý muốn (những sai sót mà các bạn đã từng viết sách đều có kinh nghiệm qua), chúng tôi rất mong các bạn đồng nghiệp thông cảm, thể tất.

TPHCM, mùa hè 2007

Võ Đại Mau

CÁC KÍ HIỆU DÙNG TRONG SÁCH

- $T(\vec{V})$: Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{V}$.

  (T là tiếng đầu của từ Translation, tiếng Pháp, dùng trong toán học có nghĩa là phép tịnh tiến).

- $S(O)$: Phép đối xứng qua tâm O.

  (S là chữ đầu của từ symétrie, tiếng Pháp, là phép đối xứng).

- $S(\Delta)$: Phép đối xứng qua trục Δ.

- $\mathcal{H}(O, k)$: Phép vị tự tâm O, tỉ số vị tự k.

  ($\mathcal{H}$ là chữ đầu của từ Homothétie, tiếng Pháp, có nghĩa là phép vị tự)

- $\mathbb{R}(O; \alpha)$: Phép quay tâm O góc α.

  (Chữ $\mathbb{R}$ là chữ đầu của từ Rotation, tiếng Pháp, có nghĩa là phép quay).

- $Si(O; k; \theta)$ hoặc $Si(O; k; \alpha)$: Phép đồng dạng tâm O, tỉ số đồng dạng k, góc đồng dạng θ hoặc góc đồng dạng α.

  (Chữ Si là hai chữ đầu của Similaire, tiếng Pháp nghĩa là phép đồng dạng).

- $[2\pi]$, $[180^0]$: môđun 2π, môđun 180^0. (Môđun là phiên âm của từ module).

  Theo qui ước quốc tế, các kí hiệu toán học đều dựa vào qui ước toán học của Pháp.

* Những bài toán có dấu (*) là những bài toán tương đối khó dành cho học sinh khá giỏi.

Chương 0. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHÉP BIẾN HÌNH VÀ DỜI HÌNH TRONG MẶT PHẲNG

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Phép biến hình trong mặt phẳng

1. Ảnh của một điểm

Trong mặt phẳng (P), cho một điểm M.

Phép biến hình f trong mặt phẳng (P) là một qui tắc cho tương ứng điểm M ∈ (P) một điểm M' ∈ (P)

$$f:\ M \in (P) \longmapsto M' \in (P)$$

$$\text{hay: } M \in (P) \xmapsto{f} M' \in (P)$$

M': gọi là điểm biến đổi của điểm M cho bởi phép biến hình f hay M' là **ảnh** của điểm M cho bởi phép biến hình f.

Kí hiệu: M' = f (M).

M gọi là **tạo ảnh** của M' trong phép biến hình f.

Trong toán học, phép biến hình f trong mp (P) là một ánh xạ đi từ mp (P) vào mp (P).

Thí dụ: Nếu ta có: $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$, $\vec{V}$ là một vectơ cho trước thì M' gọi là ảnh của điểm M trong phép tịnh tiến theo $\vec{V}$, kí hiệu $T(\vec{V})$.

Nếu ta có: $\overline{OM'} = k\,\overline{OM}$, k là một số thực cho trước, k ≠ 0 thì M' gọi là ảnh của điểm M trong phép vị tự tâm O, tỉ số k, kí hiệu H (O; k).

Nếu ta có: $\overline{OM'}\,.\,\overline{OM} = k$, k là số thực cho trước, k ≠ 0 thì M' gọi là ảnh của điểm M trong phép nghịch đảo tâm O, phương tích nghịch đảo k, kí hiệu: I(O; k).

2. Ảnh của một hình

Trong phép biến hình f, nếu M vẽ một hình (F) thì M' vẽ một hình (F'), gọi là ảnh của hình F trong phép biến hình f.

$$(F) \xrightarrow{f} (F')$$

Kí hiệu: F' = f (F).

(F') là tập hợp tất cả các ảnh của tất cả các điểm thuộc hình (F) cho bởi phép biến hình f.

II. Phép dời hình trong mặt phẳng

1. Định nghĩa:

Trước hết phép dời hình trong mặt phẳng là một phép biến hình trong mặt phẳng.

+ Biến đổi một điểm M thuộc mặt (P) thành một điểm M' thuộc mp (P).

+ Biến đổi một hình (F) thành một hình (F') trong cùng một mặt phẳng nhưng không làm thay đổi hình dạng và kích thước của hình.

Nói một cách khác là phép dời hình f biến một hình (F) thành một hình (F') bằng hình (F).

Trong toán học, phép dời hình phẳng f được gọi là song ánh đi từ mp (P) lên mặt phẳng (P).

Hiểu một cách nôm na là phép dời hình f đã "dời" hình (F) từ vị trí ban đầu đã cho đến một vị trí mới.

2. Phép dời hình đồng nhất biến đổi hình (F) thành hình (F') trùng với hình (F)

Kí hiệu e: $(F) \xrightarrow{e} (F') \equiv (F)$.

3. Tính chất của phép dời hình

a) Phép dời hình không làm thay đổi hình dạng:

Trong một phép dời hình:

+ Đoạn thẳng AB có ảnh là đoạn thẳng A'B'

$$A \longmapsto A'$$
$$B \longmapsto B'$$
$$AB \longmapsto A'B'.$$

+ Đường thẳng D có ảnh là đường thẳng D'

$$D \xrightarrow{f} D'.$$

+ Góc $\widehat{xOy}$ có ảnh là góc $\widehat{x'O'y'}$

$$Ox \xrightarrow{f} O'x'$$
$$Oy \xrightarrow{f} O'y'$$
$$\Rightarrow \widehat{xOy} \xrightarrow{f} \widehat{x'O'y'}.$$

b) Phép dời hình bảo toàn độ lớn:

+ Ảnh của một đoạn thẳng AB là đoạn thẳng A'B' bằng AB

$$AB \xrightarrow{f} A'B' = AB.$$

+ Ảnh của một góc $\widehat{xOy}$ là góc $\widehat{x'O'y'}$ bằng góc $\widehat{xOy}$:

$$\widehat{xOy} \xrightarrow{f} \widehat{x'O'y'} = \widehat{xOy}$$

+ Ảnh của đường tròn (O) là một đường tròn (O') bằng đường tròn (O)

$$(O, R) \xrightarrow{f} (O',R)$$ với O' là ảnh của O.

4. ***Tích của hai phép dời hình phẳng:***

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g_o f"'] & M' \arrow[r, "g"] & M'' \end{tikzcd}$$

- M' là ảnh của M cho bởi phép dời hình phẳng f:

$$M' = f(M).$$

- M" là ảnh của M' cho bởi phép dời hình phẳng g:

$$M'' = g(M').$$

Ta nói M" là ảnh của M cho bởi tích của phép dời hình phẳng f với phép dời hình phẳng g: f × g

Kí hiệu: $g_o f$ (đọc là g tròn f).

$$M \xrightarrow{g_o f} M''.$$

Ý nghĩa là thực hiện liên tiếp phép dời hình phẳng f trước, g sau.

Chương I. PHÉP TỊNH TIẾN

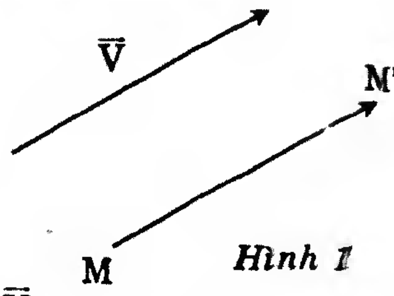
KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa:

Cho $\vec{V} \neq \vec{0}$ và một điểm M nằm trong mặt phẳng (P).

a) Ảnh của một điểm:

Điểm M' được gọi là ảnh của điểm M trong phép tịnh tiến vectơ $\vec{V}$.



Hình 1

Kí hiệu: $T(\vec{V})$, khi: $\overline{MM'} = \vec{V}$

$$M \xrightarrow{T(\vec{V})} M' \Leftrightarrow \overline{MM'} = \vec{V}$$

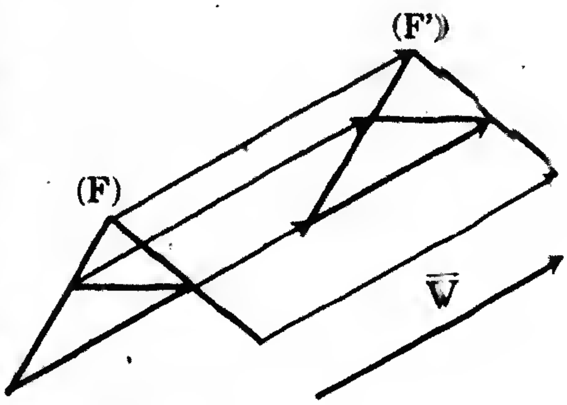
M và M' là 2 điểm đối ứng nhau trong phép tịnh tiến $T(\vec{V})$. (Hình 1)

Ngược lại ta có: $\overline{M'M} = -\vec{V}$.

M là ảnh của M' trong phép tịnh tiến ngược: $T^{-1}\vec{V} = T(-\vec{V})$.

b) Ảnh của một hình:

Trong phép tịnh tiến $T(\vec{V})$, khi điểm M vẽ một hình (F) thì điểm đối ứng M' của nó vẽ một hình (F') gọi là ảnh của hình (F) trong phép tịnh tiến $T(\vec{V})$. (H.2)



Hình 2

Vậy: ảnh của một hình (F) trong phép tịnh tiến $T(\vec{V})$ là hình (F') gồm tất cả những điểm ảnh của tất cả những điểm của hình (F) trong phép tịnh tiến $T(\vec{V})$.

$$(F) \xrightarrow{T(\vec{V})} (F') = \{M' / \overline{MM'} = \vec{V}, M \in (F)\}.$$

2. Tính chất:

Trong phép tịnh tiến, ảnh của hình (F) là hình (F') bằng hình (F)

$$(F) \xrightarrow{T(\vec{V})} (F') = (F).$$

Do đó phép tịnh tiến $T(\vec{V})$ là một phép dời hình.

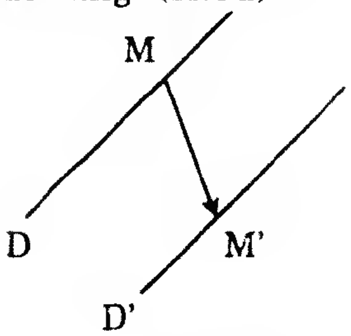
3. ***Định lí:*** Trong phép tịnh tiến T($\vec{V}$):

a) Ảnh của một đường thẳng D là một đường thẳng D' song song. (H.3a).

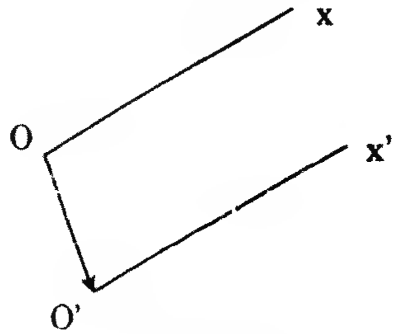
b) Ảnh của một tia Ox là tia O'x song song và cùng chiều; O và O' là 2 điểm đối ứng. (H.3b).

c) Ảnh của đoạn thẳng AB là đoạn thẳng A'B' song song và bằng AB. (H.3c).

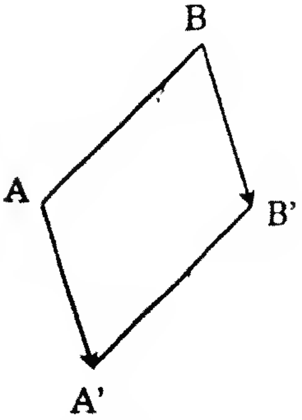
d) Ảnh của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ với A, A' và B, B' là 2 cặp điểm đối ứng. (H.3d).



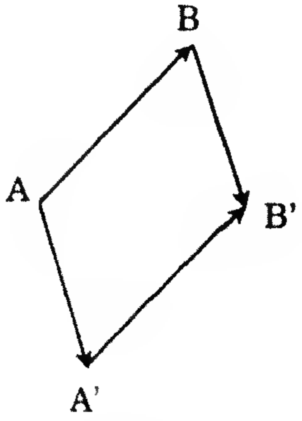
Hình 3a



Hình 3b

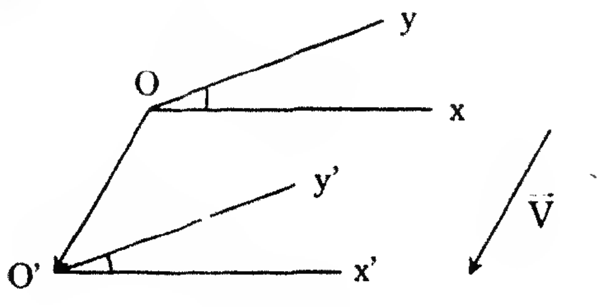


Hình 3c



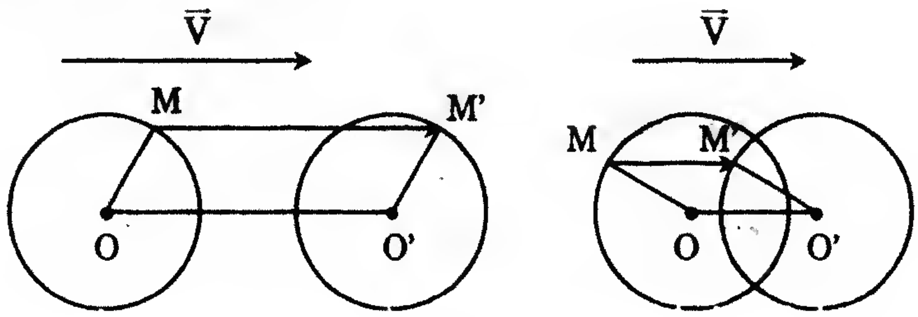
Hình 3d

e) Ảnh của góc $\widehat{xOy}$ là góc $\widehat{x'O'y'}$ bằng với góc $\widehat{xOy}$, O' là điểm đối ứng của O. (H.3e)



Hình 3e

f) Ảnh của một đường tròn (O) là một đường tròn (O') bằng đường tròn (O) và có tâm O' là ảnh của tâm O cho bởi phép tịnh tiến $T(\overrightarrow{V})$ (H.3f)



Hình 3f

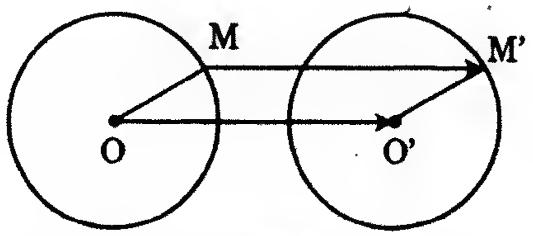
4. *Sự tịnh tiến của hai đường tròn bằng nhau cho trước:*

Cho hai đường tròn bằng nhau (O; R) và (O'; R).

Hai đường tròn (O) và (O') có thể xem là hình tịnh tiến của nhau bằng 2 cách:

+ (O') là ảnh của (O) trong phép tịnh tiến $T(\overrightarrow{O'O})$.(H.4a).

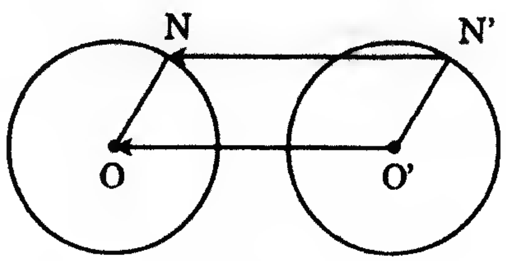
$$(O) \xrightarrow{T(O'O)} (O')$$



Hình 4a

+ (O) là ảnh của (O') trong phép tịnh tiến $T(\overrightarrow{OO'})$ (H.4b)

$$(O') \xrightarrow{T(OO')} (O)$$



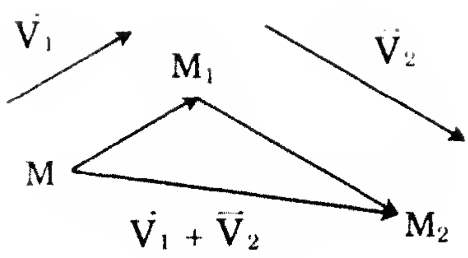
Hình 4b

5. *Tích của hai phép tịnh tiến:*

Giả sử M_1 là ảnh của M trong phép tịnh tiến $T(\overrightarrow{V_1})$ và M_2 là ảnh của M_1 trong phép tịnh tiến $T(\overrightarrow{V_2})$ thì M_2 là ảnh của M cho bởi tích của hai phép tịnh tiến $T(\overrightarrow{V_1})$ và $T(\overrightarrow{V_2})$, kí hiệu

$T(\vec{V_1}).T(\vec{V_2})$ (Hình 5)

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "T(\vec{V_1})"] \arrow[rr, bend right, "T(\vec{V_1}).T(\vec{V_2})"'] & M_1 \arrow[r, "T(\vec{V_2})"] & M_2 \end{tikzcd}$$



Hình 5

Ta có: $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$.

Do đó: M_2 là ảnh của M cho bởi phép tịnh tiến: $T(\vec{V_1} + \vec{V_2})$.

Vậy: Nếu ta thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến thì ta được một phép tịnh tiến mà vectơ tịnh tiến bằng tổng của các vectơ tịnh tiến của hai phép tịnh tiến đã cho.

$$T(\vec{V_1}).T(\vec{V_2}) = T(\vec{V_1} + \vec{V_2}).$$

- Tích của hai vectơ tịnh tiến có tính chất giao hoán:

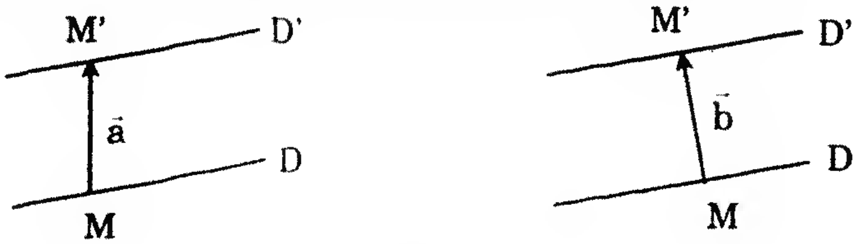
$$T(\vec{V_1}).T(\vec{V_2}) = T(\vec{V_2}).T(\vec{V_1}).$$

- Chú ý: Tích $T(\vec{V}).T(-\vec{V})$ là một phép biến đổi đồng nhất.

$$M \xrightarrow{T(\vec{V})} M_1 \xrightarrow{T(-\vec{V})} M_2 \equiv M.$$

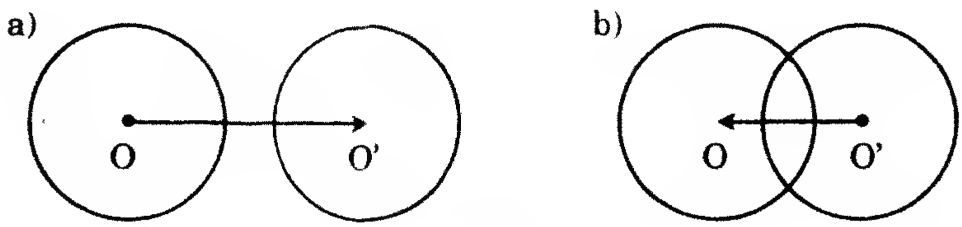
*** *Chú ý:***

1. Hai đường thẳng song song có thể xem là tịnh tiến của nhau bởi một phép tịnh tiến nào đó (Hình 6).



Hình 6

2. Hai đường tròn bằng nhau (O; R) và (O'; R) là hình tịnh tiến của nhau cho bởi phép tịnh tiến $\mathfrak{T}(\overrightarrow{OO'})$ hoặc $\mathfrak{T}(\overrightarrow{O'O})$.



Hình 7

LUYỆN TẬP

1. Cho một hình bình hành ABCD có hai đỉnh A, B cố định. Tìm tập hợp đỉnh D khi:

a) C di động trên đường thẳng Δ cố định cho trước.

b) C di động trên đường tròn (O) tâm O cố định, bán kính R cho trước.

Hướng dẫn: Ta có: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow$ đpcm.

Giải

ABCD là một hình bình hành nên ta có: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.

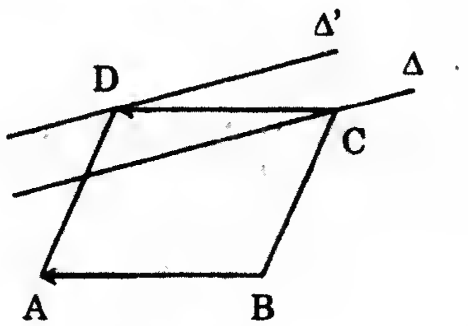
Vectơ $\overrightarrow{BA}$ cố định.

Do đó D là ảnh của C trong phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\overrightarrow{BA})$.

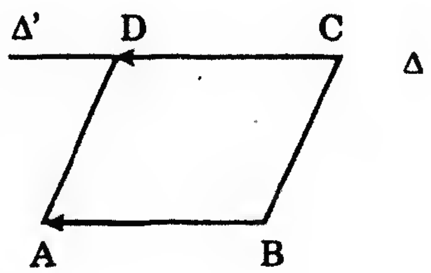
a) Khi C di động trên một đường thẳng Δ thì D di động trên đường thẳng Δ', ảnh của Δ cho bởi phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\overrightarrow{BA})$. (Hình 8a)

Nếu Δ qua D thì Δ' trùng với Δ. (Hình 8b)

Vậy tập hợp các điểm D là đường thẳng Δ', ảnh của Δ cho bởi phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\overrightarrow{BA})$.



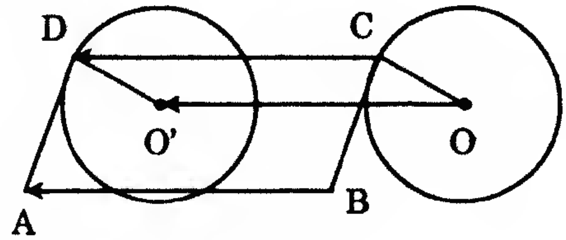
Hình 8a



Hình 8b

b) Khi C di động trên đường tròn (O; R) thì D di động trên đường tròn (O'; R), ảnh của đường tròn (O; R) cho bởi phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\overrightarrow{BA})$, với O' là ảnh của O trong phép tịnh tiến đó. (Hình 9).

Vậy tập hợp các điểm D là đường tròn (O'; R).



Hình 9

2. Cho đường tròn (O) cố định và một đoạn thẳng MN cố định. Trên (O), lấy một điểm A và kẻ đoạn thẳng AI song song và bằng MN. Tìm tập hợp các điểm I khi A di động trên đường tròn (O).

Hướng dẫn: Nhận xét rằng: AI $\mathbin{\substack{/\!/\\=}}$ MN. Như vậy ta có: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{MN}$

hoặc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{NM}$.

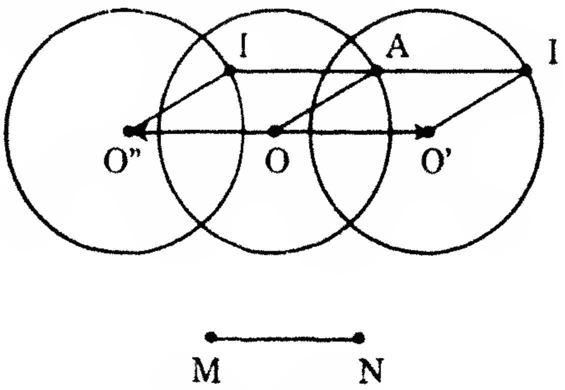
Giải

Theo giả thiết, ta có: AI $\mathbin{\substack{/\!/\\=}}$ MN.

Suy ra: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{MN}$ hoặc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{NM}$.

Như vậy: I là ảnh của A trong phép tịnh tiến T($\overrightarrow{MN}$) hoặc trong phép tịnh tiến T($\overrightarrow{NM}$).

Do đó: Khi A vạch đường tròn (O) tâm O thì I vạch đường tròn (O') tâm O' bằng (O), với O' là ảnh của O cho bởi phép T($\overrightarrow{MN}$) hoặc I vạch đường tròn (O") tâm O", bằng (O), với O" là ảnh của O cho bởi phép tịnh tiến T($\overrightarrow{NM}$).



Hình 10

3. Cho đường tròn (O) tâm O, bán kính R. Trên (O), lấy hai điểm cố định A, B và một điểm C di động. Tìm tập hợp trực tâm H của tam giác ABC.

Hướng dẫn: Trước hết chúng ta chứng minh rằng: $\overrightarrow{CH} = 2\,\overrightarrow{OM}$

với M là trung điểm của cạnh AB $\Rightarrow$ đpcm.

Giải

Gọi M là trung điểm của AB, M cố định: OM $\perp$ AB. Kẻ đường kính AOA' $\Rightarrow$ A'B $\perp$ AB.

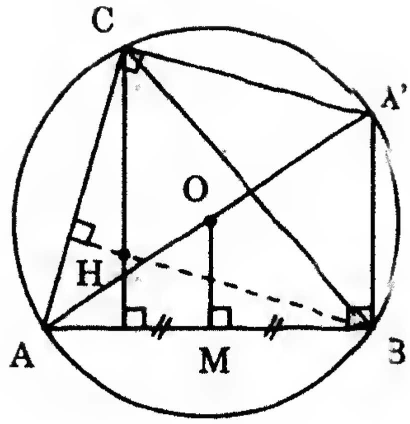
Ta có: $\overrightarrow{A'B} = 2\overrightarrow{OM}$.

Tứ giác CHBA' là hình bình hành (Vì sao?)

$\Rightarrow \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{A'B} = 2\overrightarrow{OM}$.

Như vậy: H là ảnh của C trong phép tịnh tiến $T(\vec{V})$ với $\vec{V} = 2\overrightarrow{OM}$. (Hình 11)

Do đó: Khi C vạch đường tròn (O; R) thì H vạch đường tròn (O'; R) với O' là ảnh của O cho bởi phép tịnh tiến $T(\vec{V})$.



Hình 11

4. Cho tam giác ABC cố định, trực tâm H. Vẽ hình thoi BCDE. Kẻ DD' ⊥ AB, EE' ⊥ AC; DD' và EE' giao nhau tại M. Tìm tập hợp điểm M khi hình thoi BCDE thay đổi.

Hướng dẫn: Chứng minh $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{CH}$.

Giải

Tứ giác BCDE là một hình thoi nên ta có:

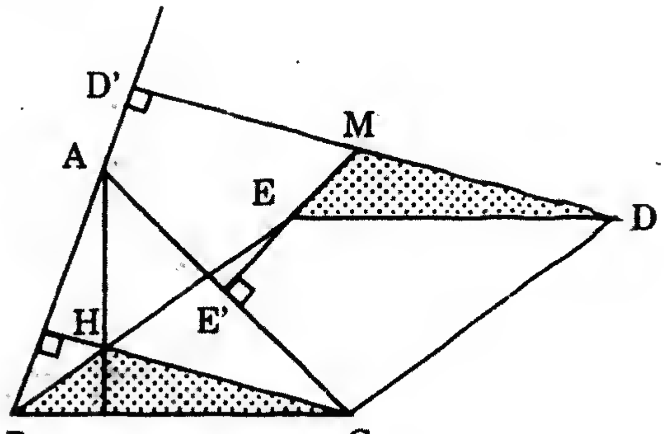
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED}$.

Hai tam giác HBC và MED bằng nhau vì có:

BC = ED

$\hat{B}_1 = \hat{E}_1$ (Góc nhọn có cạnh đôi một song song)

$\hat{C}_1 = \hat{D}_1$ (Như trên).



Hình 12

Suy ra: $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{CH}$ (Hình 12).

Điều này chứng tỏ M là ảnh của D trong phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\overrightarrow{CH})$.

Ta lại có: CD = BC = a không đổi (vì sao?).

Suy ra: Tập hợp các điểm D là đường tròn (α) tâm C bán kính R = CD = a.

Do đó, tập hợp các điểm M là ảnh của đường tròn (α) cho bởi phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\overrightarrow{CH})$. Đó là đường tròn (β) tâm H, bán kính R = HM = a.

Vậy: Tập hợp các điểm M phải tìm là đường tròn (β) tâm H, bán kính R = BC = a.

5. Trên đường tròn (O) tâm O, bán kính R, cho hai điểm cố định A, B và một điểm C di động.

a) Tìm tập hợp trực tâm H của ΔABC.

b) Tìm tập hợp đỉnh M của tam giác đều CHM.

Hướng dẫn: Gọi A' là đối tâm của A

So sánh $\vec{CH}$ và $\vec{A'B}$. Xem bài 3.

Giải

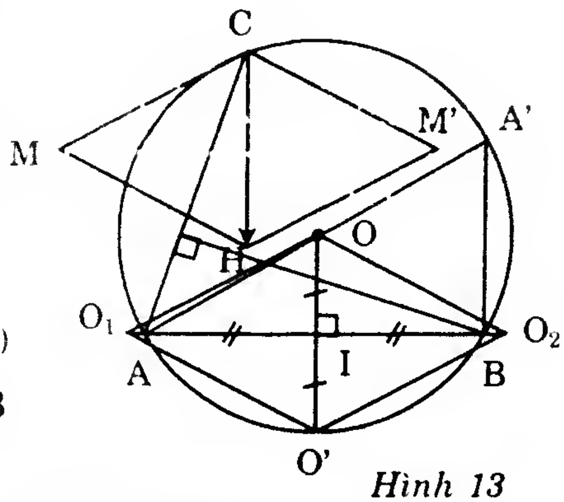
a) Gọi A' là điểm đối tâm của A. Ta có: $\vec{CH} = \vec{A'B}$ (xem bài 3)

Ta suy ra: H là ảnh của C trong phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{A'B})$.

Do đó: Khi C chạy trên đường tròn (O; R) thì H chạy trên đường tròn (O'; R), ảnh của đường tròn (O; R) cho bởi phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{A'B})$, với O' là ảnh của O trong phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{A'B})$: $\vec{OO'} = \vec{A'B} = 2\vec{OI}$.

I là trung điểm của AB. (Hình 13)

(O) và (O') đối xứng nhau qua AB nên (O') đi qua A, B



Hình 13

b) Xét điểm M nằm cùng phía với A đối với CH.

Dựng $\vec{OO_1} = \vec{HM} \Rightarrow \Delta OO'O_1$ đều và O_1 nằm trên đường thẳng AB, $O'O_1$ cố định nên $\Delta OO'O_1$ cố định $\Rightarrow \vec{CM} = \vec{OO_1}$

Suy ra: M là ảnh của C cho bởi $\mathcal{T}(\vec{OO_1})$. Khi C vạch đường tròn (O; R) thì tập hợp các điểm M là đường tròn (O_1; R), ảnh của đường tròn (O; R) cho bởi $\mathcal{T}(\vec{OO_1})$.

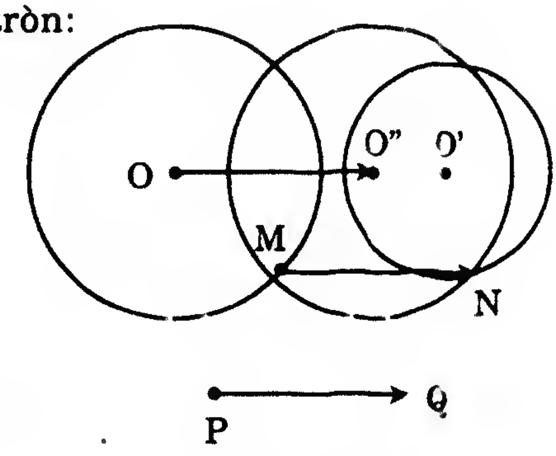
• Tương tự, nếu điểm M nằm cùng phía với B đối với CH thì tập hợp các điểm M là đường tròn (O_2; R), ảnh của đường tròn (O; R) cho bởi $\mathcal{T}(\vec{OO_2})$.

6. Cho hai đường tròn (O), (O') và một đoạn thẳng PQ cố định. Hãy dựng một đoạn thẳng MN song song và bằng PQ sao cho M $\in$ (O) và N$\in$ (O').

Hướng dẫn: Dựng đường tròn (O''), ảnh của đường tròn (O) cho bởi phep tịnh tiến T($\vec{V}$) với $\vec{V} = \vec{PQ}$ hoặc $\vec{V} = \vec{QP}$.

Giải

Giả sử ta đã dựng được đoạn thẳng MN song song và bằng PQ, với M ∈ (O) và N ∈ (O'). (Hình 14)



Hình 14

Ta suy ra rằng N thuộc hai đường tròn:

- Đường tròn (O') đã cho.
- Đường tròn (O"), ảnh của đường tròn (O) cho bởi phép tịnh tiến $T(\overrightarrow{V})$, với $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{PQ}$ hcặc $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{QP}$.

  Do đó N là giao điểm của hai đường tròn (O') và (O").

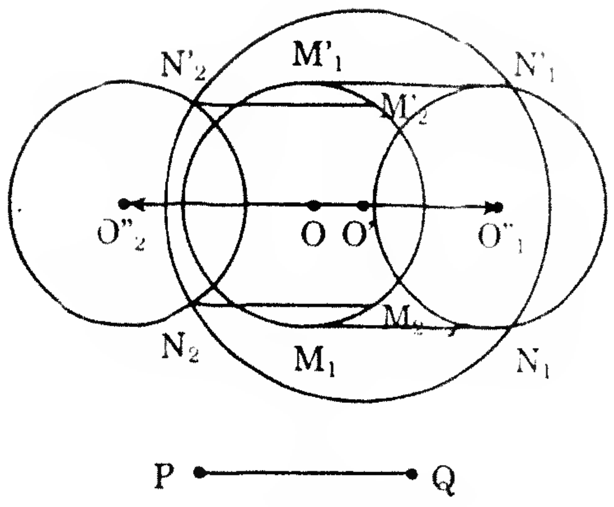
  Ta suy ra cách dựng đoạn thẳng MN song song và bằng PQ như sau:

- Dựng đường tròn (O"), ảnh của (O) cho bởi phép tịnh tiến $T(\overrightarrow{V})$, với $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{PQ}$ hoặc $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{QP}$.
- Từ N kẻ $\overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{V}$, M ∈ (O), ta có MN là đoạn thẳng phải dựng.

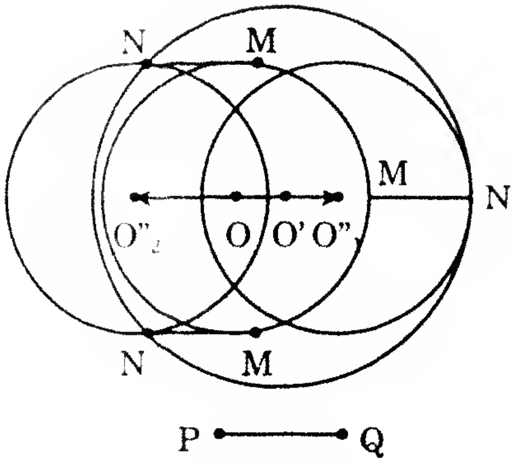
  Biện luận: Gọi ($O"_1$) và ($O"_2$) theo thứ tự là ảnh của (O) cho bởi các phép tịnh tiến $T(\overrightarrow{PQ})$ và $T(\overrightarrow{QP})$.

- Nếu (O') cắt (O_1") và ($O"_2$) tại N_1, N_1' và N_2, N_2': Có 4 nghiệm hình (hình 15).
- Nếu (O') cắt (O_1") và tiếp xúc với (O_2") hoặc cắt (O_2") và tiếp xúc với (O_1"). Có 3 nghiệm hình (hình 16).
- Nếu (O') chỉ cắt (O_1") và không có điểm chung với (O_2") hoặc cắt (O_2") và không có điểm chung với (O_1") hoặc (O') tiếp xúc đồng thời với (O_1") và (O_2"): Có 2 nghiệm hình.
- Nếu (O') chỉ tiếp xúc với một trong hai đường tròn (O_1"), (O_2"): Có 2 nghiệm hình.
- Nếu (O') không có điểm chung với cả hai đường tròn (O_1") và (O_2"), không có nghiệm hình. (Hình 17)

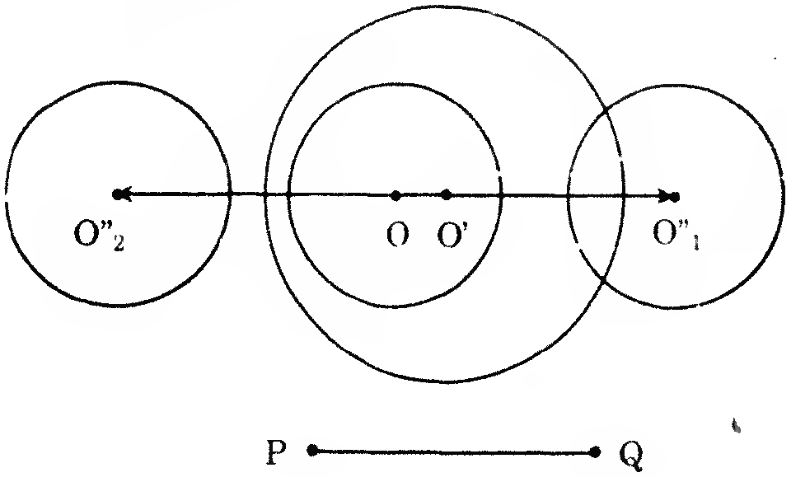
* ***Chú ý:*** Đường nối tâm OO' không bắt buộc phải song song với PQ.



Hình 15



Hình 16



Hình 17

7. Cho một điểm A và một đường thẳng D không qua A. Hãy dựng một đường tròn có bán kính R đi qua A và chắn trên D một đoạn có chiều dài l cho trước.

Hướng dẫn:

Cách 1: Gọi O là tâm đường tròn (C) phải dựng. Kẻ OH ⊥ D tại H ⇒ OH = d không đổi. Xác định được O. Dựng được đường tròn (C).

Cách 2: Dựng đường tròn (α) tâm I tùy ý, có bán kính R và chắn trên D đoạn MN = l. Cho đường tròn (α) tịnh tiến dọc theo phương D.

Giải

Giả sử ta đã dựng được đường tròn (C) tâm O bán kính R đi qua A và chắn trên đường thẳng D một đoạn PQ = l, l là độ dài cho trước.

Dựng OH ⊥ O tại H ⇒ PH = HQ = l.

Ta có: $OH = \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{\sqrt{4R^2 - l^2}}{2}$.

Điểm O nằm trên hai đường:

- Đường tròn (A) tâm A bán kính R.
- Đường thẳng Δ // D và cách D một đoạn

$$d = \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{\sqrt{4R^2 - l^2}}{2}$$ (Có hai đường thẳng Δ và Δ').

Ta xác định được điểm O.

Đường tròn (C) tâm O, bán kính R là đường tròn phải dựng.

Thật vậy: Gọi P và Q là giao điểm của (C) và D. Kẻ OH $\perp$ D.

Ta có: $PH^2 = OP^2 - OH^2 = \frac{l^2}{4} \Rightarrow PH = \frac{l}{2} \Rightarrow PQ = l$.

Biện luận:

- Nếu $R \le \frac{l}{2}$: Bài toán không có lời giải.
- Xét $R > \frac{l}{2}$:

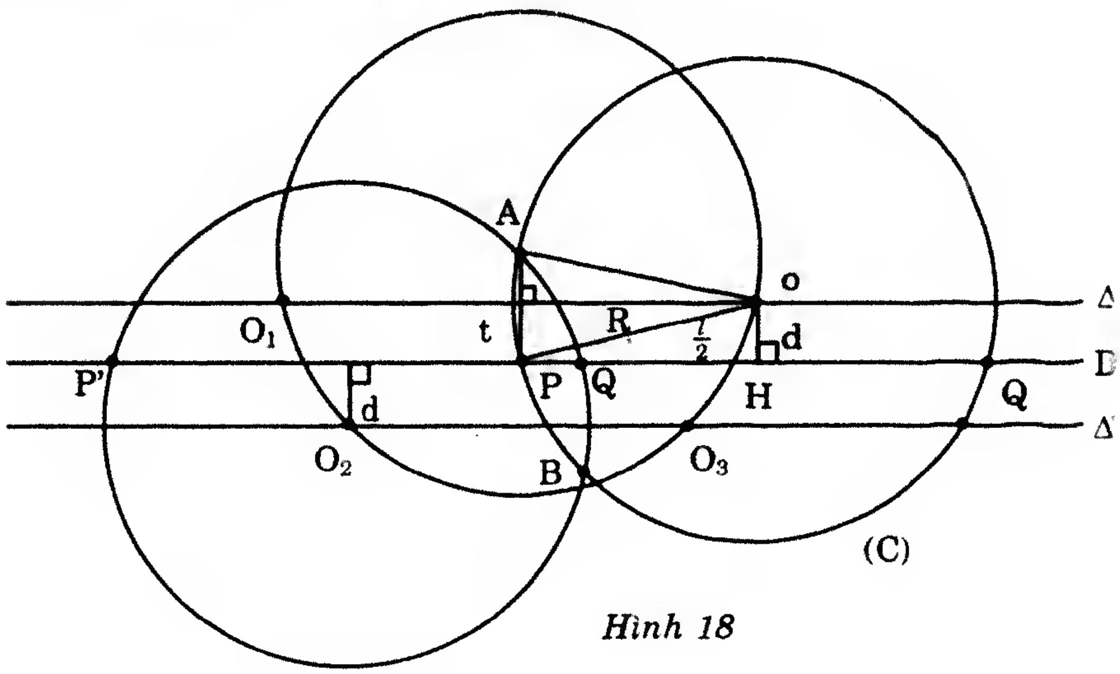
+ Gọi d là khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng D và t là khoảng từ A đến D.

Ta cần có: $d < R$

$$t - d < R \Rightarrow t < 2R \text{ hoặc: } t + d < R$$

Do đó, chỉ cần điều kiện $t + d < R$ là bài toán có lời giải: Có 4 nghiệm hình (Hình 18).

* *Cách 2:* Học sinh tự giải.



Hình 18

8. Cho hai đường tròn (O; R), (O'; R') và một đường thẳng Δ cố định. Hãy dựng theo một đường thẳng D có phương song song với Δ sao cho (O) và (O') chắn trên D hai dây bằng nhau MN và PQ.

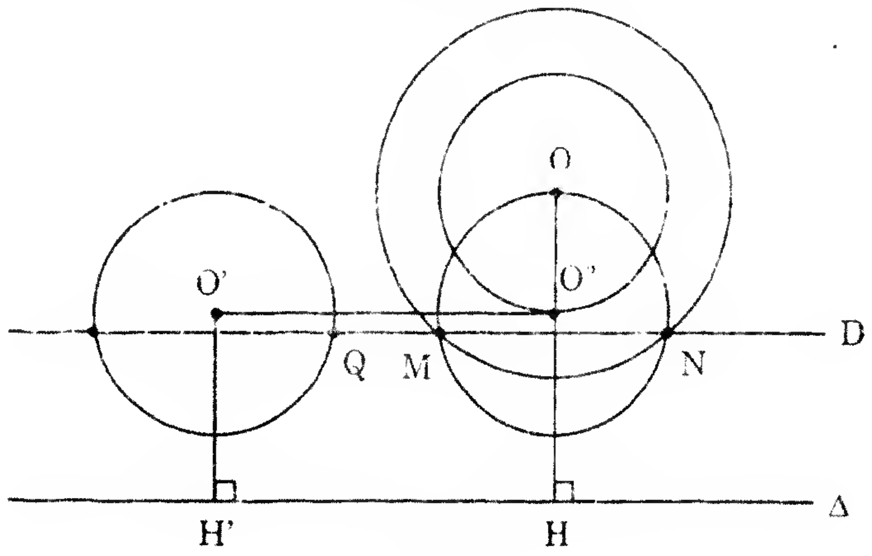
Hướng dẫn: Kẻ OH, O'H' ⊥ Δ. Đặt OH = d, O'H' = d' không đổi.

Giải

Dựng OH, O'H' ⊥ Δ. (Hình 19).

Đặt OH = d, O'H' = d'. Giả sử d > d' và R > R'.

Theo giả thiết, ta có: PQ = MN.



Hình 19

Định hướng MN và PQ sao cho:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MN}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{QN}.$$

Dựng O'O" sao cho:

$$\overrightarrow{O'O''} = \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{QN}.$$

O nằm trên trung trực của đoạn PQ. Suy ra: O" nằm trên trung trực của đoạn MN.

Do đó ta có: O" ∈ OH

$\Rightarrow$ OO" = d − d'.

O'O" là tiếp tuyến của đường tròn tâm O bán kính R = d − d'.

Suy ra M là giao điểm của đường tròn (O; R) và đường tròn (O"; R')

* *Cách dựng:*

Dựng OH ⊥ Δ.

Dựng O'O" ⊥ Δ tại O".

Dựng đường tròn (O"; R') cắt đường tròn (O; R) tại M và N.

Đường thẳng MN là đường thẳng D phải dựng.

* *Chứng minh:*

Ta có: $OH \perp \Delta$, $O'O'' \perp OH \Rightarrow O'O'' // \Delta$.

Đường tròn (O", R) có thể xem là ảnh của đường tròn (O', R') cho bởi phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\overrightarrow{O'O''})$.

Gọi P, Q là giao điểm của đường thẳng MN và đường tròn (O'; R').

Định hướng PQ sao cho $\overrightarrow{PQ}$ cùng hướng với $\overrightarrow{MN}$.

Ta có: $\overrightarrow{PQ} \xrightarrow{T(\overrightarrow{O'O''})} \overrightarrow{MN}$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MN}$

$MN \perp OO' \Rightarrow MN // \Delta$, đpcm.

* *Biện luận:*

Đường tròn (O"; R') cắt đường tròn (O; R) khi và chỉ khi

$R - R' < OO'' < R + R'$

$\Rightarrow R - R' < d - d' < R + R'$.

9. Cho tam giác ABC có đỉnh A cố định và $\widehat{A} = \varphi$ không đổi; B và C di động sao cho $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, không đổi.

a) Tìm tập hợp các điểm B và C.

b) Chứng tỏ rằng đường cao BB' của ΔABC luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn

a) Vận dụng định lí hàm sin.

b) Gọi H là trực tâm ΔABC. Chứng minh H cố định.

Giải

a) Dựng đường tròn (α) tâm O ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi R là bán kính của đường tròn (α).

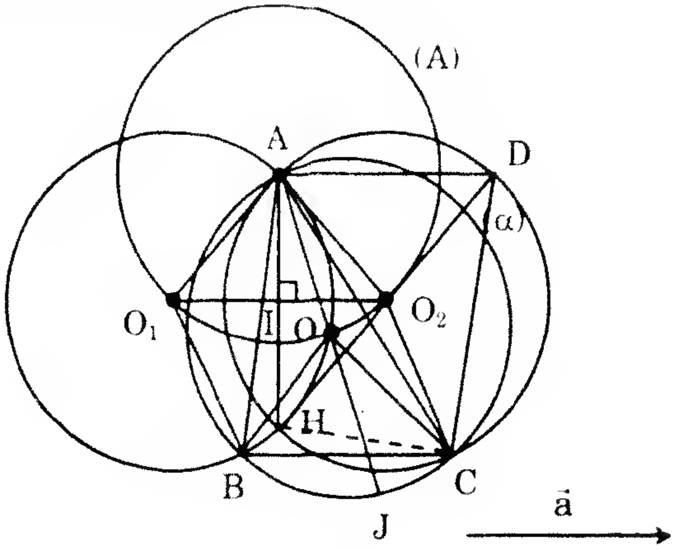
Theo định lí hàm sin, ta có:

$$R = \frac{BC}{2\sin\varphi} = \frac{a}{2\sin\varphi}, \text{ không đổi.}$$

Suy ra O chạy trên đường tròn (A) tâm A, bán kính $R = \dfrac{a}{2\sin\varphi}$.

ΔOBC cân có $OB = OC = R$, $BC = a$ và $\widehat{BOC} = 2\varphi$.

Ta suy ra: ΔOBC di động nhưng không thay đổi hình dạng và luôn luôn bằng chính nó. (Hình 20).



Hình 20

Các vectơ $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC}$ có độ dài không đổi và hợp với vectơ $\vec{a}$ một góc không đổi $\theta = 90^0 - \varphi$ nên các vectơ $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC}$ là các vectơ có độ dài và hướng không đổi.

Dựng $\overrightarrow{AO_1} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AO_2} = \overrightarrow{OC}$, các vectơ $\overrightarrow{AO_1}$ và $\overrightarrow{AO_2}$ cố định.

Suy ra: B là ảnh của O cho bởi $\mathscr{T}(\overrightarrow{AO_1})$ và C là ảnh của O cho bởi $\mathscr{T}(\overrightarrow{AO_2})$.

Khi O chạy trên đường tròn (A; R) thì tập hợp các điểm B là đường tròn (O_1; R), ảnh của đường tròn O cho bởi $\mathscr{T}(\overrightarrow{AO_1})$.

Tập hợp các điểm C là đường tròn (O_2; R), ảnh của đường tròn (A).

b) Gọi A' là giao điểm thứ hai của các đường tròn (O_1) và (O_2).

Ta có: $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{BC} \\ O_1O_2 \perp AH\end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp BC.$

Đường tròn (O_2) có thể xem là ảnh của đường tròn (O_1) cho bởi $\mathscr{T}(\vec{a})$.

Gọi D là điểm đối tâm của điểm H trong đường tròn (O_2) và I là giao điểm của AH và O_1O_2.

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{IO_2} = \overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow CD \,//\, AB$, $\widehat{HCD} = 90^0 \Rightarrow CH \perp AB$.

Suy ra: H là trực tâm ΔABC.

D cố định nên H cố định.

Do đó đường cao BB' của ΔABC luôn luôn đi qua điểm cố định H, trực tâm của ΔABC.

10. Trong mặt phẳng (Oxy), cho điểm $M(x_M; y_M)$ và vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$. Gọi $M'(x_{M'}; y_{M'})$ là ảnh của M cho bởi phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{a})$.

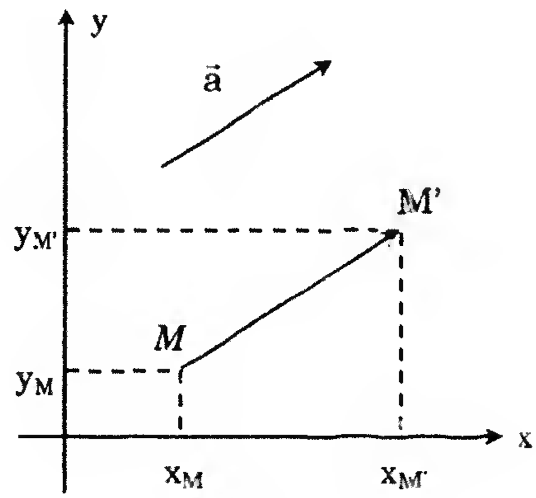
Hãy xác định tọa độ của M' theo tọa độ của M và tọa độ của $\vec{a}$.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} - x_M = a_1 \\ y_{M'} - y_M = a_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = x_M + a_1 \\ y_{M'} = y_M + a_2 \end{cases}$



Hình 21

11. Trong mặt phẳng (Oxy), cho điểm A(1; 3) và $\vec{a} = (-2; 4)$. Xác định điểm M', ảnh của điểm M cho bởi phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{a})$.

Giải

Theo bài 10, ta có tọa độ điểm M' cho bởi công thức:

$$\begin{cases} x_{M'} = x_M + a_1 = 1 - 2 = -1 \\ y_{M'} = y_M + a_2 = 3 + 4 = 7 \end{cases}$$

Vậy M'(–1; 7).

12. Trong mặt phẳng (Oxy), cho vectơ $\vec{a} = (1; 2)$. Tìm ảnh của đường tròn: (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ cho bởi phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{a})$.

Giải

Đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ có tâm I(2; 1), bán kính R = 3.

Gọi $I'(x_0; y_0)$ là ảnh của I cho bởi phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{a})$.

Ta có: $\begin{cases} x_0 = x_1 + a_1 = 3 \\ y_0 = y_1 + a_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow I'(3; 3).$

Ta biết rằng ảnh của một đường tròn cho bởi phép tịnh tiến là một đường tròn bằng đường tròn đã cho.

Do đó ta có ảnh của đường tròn: (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ là đường tròn (C') có phương trình: $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0.$$

13. Trong mặt phẳng (Oxy), cho vectơ $\vec{a} = (1; 2)$. Tìm ảnh cho bởi phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{a})$ của các conic sau

a) Parabol (P): $y^2 = 4x$.

b) Elip (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

c) Hyperbol: (H): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Giải

a) Gọi M(x; y) là một điểm thuộc Parabol (P): $y^2 = 4x$ và $M'(x_0; y_0)$ là ảnh của M cho bởi phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{a})$.

Ta có: $\begin{cases} x_0 = x + 1 \\ y_0 = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 - 1 \\ y = y_0 - 2 \end{cases}$

$M \in (P) \Leftrightarrow y^2 = 4x$

$\Leftrightarrow (y_0 - 2)^2 = 4(x_0 - 1)$

$\Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{4}y_0^2 - y_0 + 2.$

Vậy: Ảnh của parabol (P): $y^2 = 4x$ cho bởi phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{a})$ là parabol (P'): $x = \frac{1}{4}y^2 - y + 2$.

b) Tương tự ta có ảnh của elip (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

là elip (E'): $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$.

c) Ảnh của hyperbol (H): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

là hyperbol (H'): $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$.

14. Trong phép tịnh tiến $T(\vec{V})$ với $\vec{V} = (-2; 4)$, hãy tìm ảnh của:

a) Đường tròn (γ): $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$.

b) Parabol (P): $y^2 = 2x$.

c) Elip (E): $4x^2 + y^2 = 4$.

d) Hyperbol (H): $x^2 - 4y^2 = 4$.

Học sinh tự giải.

15. Cho hai đường tròn (O) và (O') giao nhau. Gọi A là một trong hai giao điểm.

Qua A, kẻ một cát tuyến (Δ) cắt (O) tại B và (O') tại C. Trên (Δ) lấy hai đoạn AM và AN sao cho: $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

a) Dựng $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Chứng minh: $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OA}$.

b) Suy ra quỹ tích của M và N.

Giải

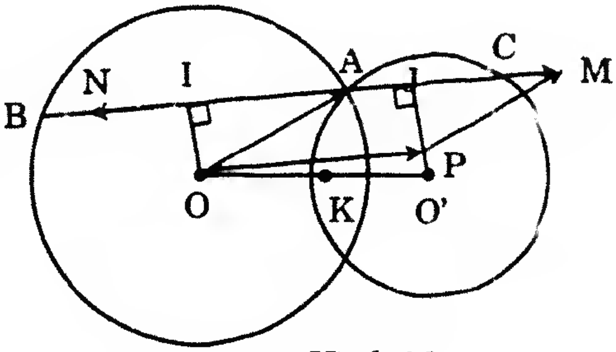
Ta có: $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (Hình 22)

$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OA}$

Suy ra: M là ảnh của P trong phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\overrightarrow{OA})$

Gọi I và J theo thứ tự là trung điểm của AB và AC.



Hình 22

Ta có: OI, O'J $\perp$ (Δ) và $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{IJ} \Rightarrow PJ \perp (\Delta)$

$\Rightarrow P \in O'J \Rightarrow \widehat{OPO'} = 90^0$.

Khi đường thẳng (Δ) quay quanh điểm A thì P chạy trên đường tròn (α) đường kính OO', tâm K là trung điểm của đoạn OO'.

Tập hợp các điểm M là đường tròn (β), ảnh của đường tròn (α) cho bởi phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\overrightarrow{OA})$.

* Vì điểm N là điểm đối xứng của M qua A nên tập hợp các điểm N là đường tròn (γ), ảnh của đường tròn (β) cho bởi phép đối xứng S(Δ) qua điểm A.

16. Trên đường tròn cố định (O; R) cho trước, lấy hai điểm cố định A và B, C là một điểm di động trên (O) và không trùng với A, B.

Gọi H là trực tâm của ΔABC; P và Q là giao điểm của hai đường tròn tâm C bán kính CH = ρ và đường tròn tâm H bán kính ρ.

Tìm tập hợp các điểm P, Q.

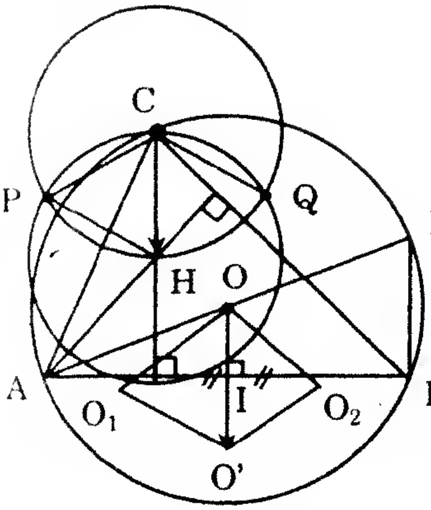
Giải

Ta có: $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{OI}$ (xem bài 5). Trong đó, D là điểm đối tâm của A và I là trung điểm của đoạn AB.

Điều này chứng tỏ $\overrightarrow{CH}$ là một vectơ có phương, chiều và độ dài không đổi.

Đặt $\overrightarrow{CH} = \vec{V}$, cố định và $|\vec{V}| = CH = \rho$.

Tam giác ΔCHP đều.



Hình 23

Dựng $\overrightarrow{OO'} = 2\,\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{CH}$; $\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{CP}$.

Suy ra: $\Delta OO'O_1$ đều và cố định vì có một cạnh cố định OO'.

Do đó ta có: P là ảnh của C trong phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\overrightarrow{OO_1})$. (Hình 23)

Tập hợp các điểm P là đường tròn (α), ảnh của đường tròn (O) cho bởi phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\overrightarrow{OO_1})$, tâm O_1, bán kính R.

Tương tự, ta có tập hợp các điểm Q là đường tròn (β), ảnh của đường tròn (O) cho bởi phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\overrightarrow{OO_2})$.

17. Trên đường thẳng cố định x'x, lấy một điểm B cố định và một điểm C di động. Dựng tam giác ΔPBC cân tại P. Biết đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ΔPBC có bán kính R không đổi, hãy tìm:

a) Tập hợp (E) các điểm P.

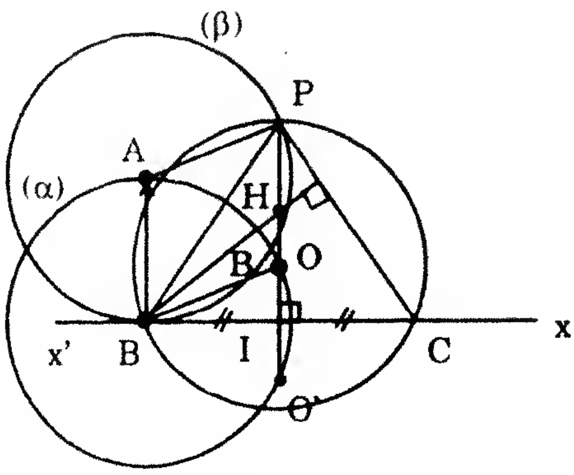
b) Tập hợp (F) trực tâm H của ΔPBC.

Giải

a) Vectơ $\overrightarrow{OP}$ có phương không đổi (vuông góc với đường thẳng x'x) và có độ dài không đổi (OP = R).

Dựng $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OP} \Rightarrow \overrightarrow{BA}$ cố định.

Suy ra: P là ảnh của O trong phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\overrightarrow{BA})$.



Hình 24

Tập hợp các điểm O là đường tròn (α) tâm B bán kính R.

Do đó, tập hợp các điểm P là đường tròn (β), ảnh của đường tròn (α) cho bởi phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\overrightarrow{BA})$, là đường tròn tâm A bán kính R. (hình 24).

b) Gọi I là trung điểm của BC và O' là điểm đối xứng của điểm O qua đường thẳng x'x.

Ta có: $\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{OO'} \Leftrightarrow \overrightarrow{O'H} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{BA}$.

Suy ra: H là ảnh của O' trong phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\overrightarrow{BA})$.

O' ∈ (α) (Vì sao ?).

Do đó: Tập hợp các điểm H là ảnh của đường tròn (α) cho bởi phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\overrightarrow{BA})$, chính là đường tròn (β), tập hợp các điểm P.

Nhận xét rằng: Đường tròn (β) tiếp xúc với đường thẳng x'x tại B.

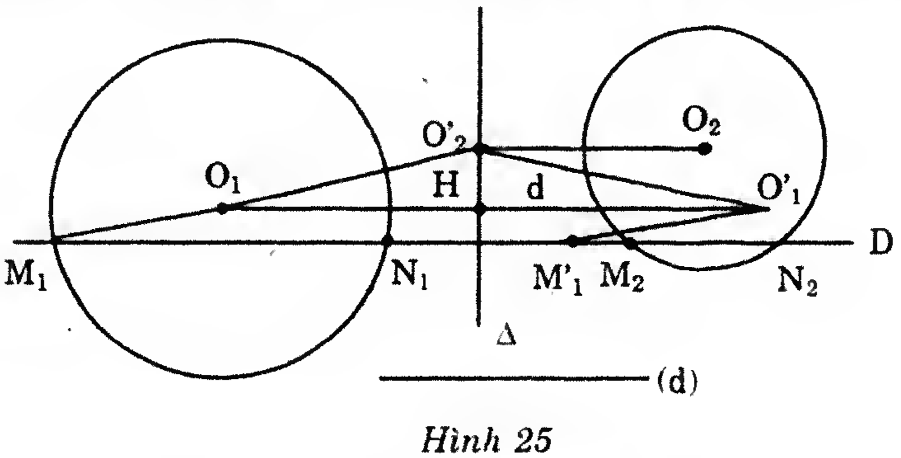
18. Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ và một phương (d). Hãy dựng một đường thẳng D có phương (d) sao cho hai đường tròn đã cho (O_1) và (O_2) chắn trên D các dây cung MN và M'N' có tổng bằng một độ dài l cho trước.

Giải

* Giả sử ta dựng được một đường thẳng D có phương (d) cắt các đường tròn (O_1) và (O_2) đã cho theo thứ tự tại M_1, N_1 và M_2, N_2 sao cho ta có:

$$\overrightarrow{M_1N_1} + \overrightarrow{M_2N_2} = l.$$

Vectơ $\vec{l}$ có phương (d) và có độ dài bằng l: $|\vec{l}| = l$. (Hình 25)



Hình 25

Các vectơ $\overrightarrow{M_1N_1}$, $\overrightarrow{M_2N_2}$ cùng hướng với vectơ $\vec{l}$.

Dựng $\overrightarrow{M_1M'_1} = \vec{l} \Rightarrow \overrightarrow{N_1M'_1} = \overrightarrow{M_2N_2}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{N_2M'_1} = \overrightarrow{M_2N_1}.$$

Dựng $\overrightarrow{O_1O'_1} = \vec{l} \Rightarrow \overrightarrow{M_1M'_1} = \overrightarrow{O_1O'_1}$.

Ta suy ra M'_1 là ảnh của M_1 trong phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{l})$.

Do đó M'_1 nằm trên đường tròn $(O'_1; R_1)$.

Mặc khác M'_1 là ảnh của N_1 trong phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\overrightarrow{M_2N_1})$

Dựng $\overrightarrow{O_2O'_2} = \overrightarrow{M_2N_1} \Rightarrow O'_2$ nằm trên trung trực Δ của $N_1M'_1$ và của $O_1O'_1$.

Do đó, M'_1 nằm trên đường tròn $(O'_2; R_2)$.

Ta suy ra M'_1 là giao điểm của các đường tròn $(O'_1; R_1)$ và $(O'_2; R_2)$.

Dựng được M'_1 là dựng được đường thẳng D.

* Ta suy ra cách dựng đường thẳng D như sau:

+ Dựng $\overrightarrow{O_1O'_1} = \vec{l}$.

+ Dựng trung trực Δ của đoạn $O_1O'_1$.

+ Qua O_2, kẻ $O_2O'_2$ song song với (d) cắt Δ ở O'_2.

+ Dựng các đường tròn $(O'_1; R_1)$ và $(O'_2; R_2)$ cắt nhau tại M'_1.

+ Qua M'_1, dựng đường thẳng D song song với (d).

D là đường thẳng phải dựng.

* *Chứng minh.*

Học sinh tự chứng minh.

* *Biện luận:* Điều kiện tồn tại M'_1:

$$|R_1 - R_2| \le O'_1O'_2 \le R_1 + R_2$$

Gọi H là trung điểm của đoạn $O_1O'_1$. Đặt $O'_2H = d$. Ta có:

$$O'_1O'_2 = d^2 + \frac{l^2}{4}.$$

$$\Rightarrow (R_1 - R_2)^2 \le d^2 + \frac{l^2}{4} \le (R_1 + R_2)^2.$$

$$\Leftrightarrow (R_1 - R_2)^2 - d^2 < \frac{l^2}{4} < (R_1 + R_2)^2 - d^2.$$

Với điều kiện: $d \le R_1 + R_2$, ta có:

– Nếu $l = 2\sqrt{(R_1 - R_2)^2 - d^2} \vee l = 2\sqrt{(R_1 + R_2)^2 - d^2}$.

Bài toán có 1 nghiệm hình.

– Nếu $2\sqrt{(R_1 - R_2)^2 - d^2} < l < 2\sqrt{(R_1 + R_2)^2 - d^2}$.

Bài toán có 2 nghiệm hình.

19. Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') và một phương (d).
Hãy dựng một đường thẳng (d) sao cho hai đường tròn đã cho (O) và (O') chắn trên D các dây cung MN và M'N' có hiệu bằng một độ dài cho trước.

Hướng dẫn: Có thể giả sử MN > M'N'. Nếu không thì chỉ cần đổi chiều bất đẳng thức.

Ta sẽ có: $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{M'N'} = \vec{l}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{N'M'} = \vec{l}.$$

Trở lại bài 18.

20. Cho đường tròn (O; R) cố định và một điểm cố định A nằm ngoài đường tròn; MM' là một đường kính di động của đường tròn.

Đường thẳng AM cắt (O) tại điểm thứ hai P và cắt đường thẳng qua M' song song với OA tại Q.

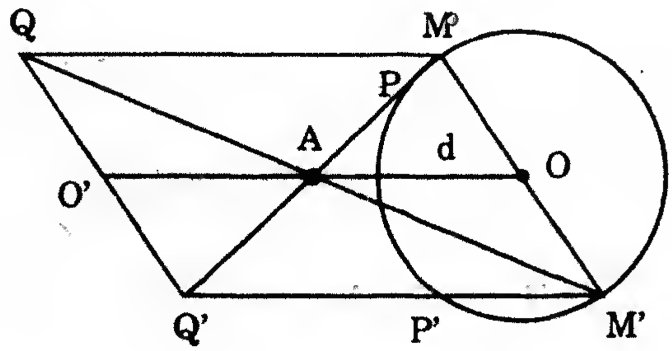
Đường thẳng AM' cắt (O) tại điểm thứ hai P' và cắt đường thẳng qua M song song với OA tại Q'.

a) Chứng minh đường thẳng QQ' đi qua một điểm cố định.

b) Tìm tập hợp các điểm Q và Q'.

Giải

a) Từ cách dựng, ta có:



Hình 26

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{M'Q'} = 2\overrightarrow{OA}.$$

Gọi O' là điểm đối xứng của điểm O qua tâm A, O' ∈ QQ'.

Vậy: QQ' luôn luôn đi qua điểm cố định O'. (Hình 26).

b) Ta có: Q và Q' theo thứ tự là ảnh của M và M' trong phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\overrightarrow{OO'})$.

Do đó khi đường kính MM' quay quanh O thì tập hợp các điểm Q và Q' là đường tròn (O'; R), ảnh của đường tròn (O; R) cho bởi phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\overrightarrow{OO'})$.

Chương II. PHÉP ĐỐI XỨNG

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

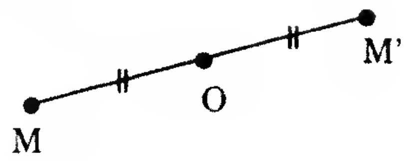
I. Phép đối xứng qua tâm (đối xứng tâm)

1. Định nghĩa

a) Ảnh của một điểm

Trong mặt phẳng, cho điểm cố định O và một điểm M

Điểm M' được gọi là điểm đối xứng của điểm M qua O hay ảnh của điểm M trong phép đối xứng tâm O, kí hiệu S(O), khi O là trung điểm của đoạn MM' (Hình 27).



Hình 27

O gọi là tâm đối xứng.

$$M \xrightarrow{S(O)} M' \Leftrightarrow \begin{cases} M, O, M' \text{ thẳng hàng} \\ OM' = OM \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}.$$

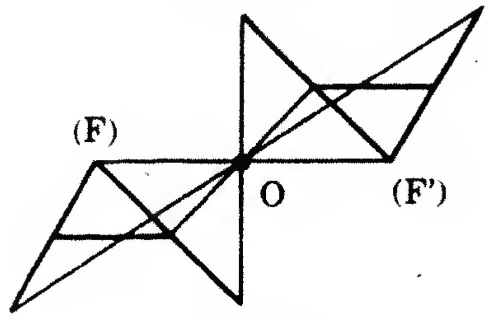
- Ảnh của điểm O trong phép đối xứng S(O) là điểm O' trùng với điểm O.

  O gọi là điểm bất động hay điểm kép trong phép đối xứng S(O).
- Ngược lại: M cũng là ảnh của M' trong phép đối xứng S(O).
- Cách vẽ ảnh M' của M cho bởi S(O):
  - Nối MO.
  - Trên tia đối của tia OM, lấy điểm M' sao cho OM' = OM

  M' là ảnh của M cho bởi S(O).

b) Ảnh của một hình

Khi điểm M vẽ một hình (F) thì ảnh M' của M cho bởi S(O) sẽ vẽ một hình (F') gọi là ảnh (biến hình) của hình (F) cho bởi S(O). (Hình 28).



Hình 28

Do đó: Ảnh (biến hình) của một hình (F) cho bởi S(O) là một hình (F') gồm tất cả các điểm ảnh của tất cả các điểm của hình (F) cho bởi S(O).

$$(F') = \{M' \mid M \xmapsto{S(O)} M',\ M \in (F)\}.$$

Nếu (F') trùng với (F) thì O gọi là tâm đối xứng của hình (F).

2. Tính chất

Trong phép đối xứng tâm, ảnh của hình (F) là một hình (F') bằng hình (F):

$$(F) \xrightarrow{S(O)} (F') = (F)$$

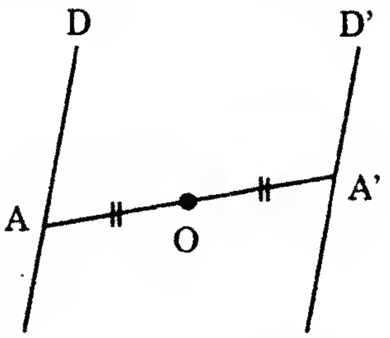
Do đó: Phép đối xứng tâm là một phép dời hình.

3. Định lí

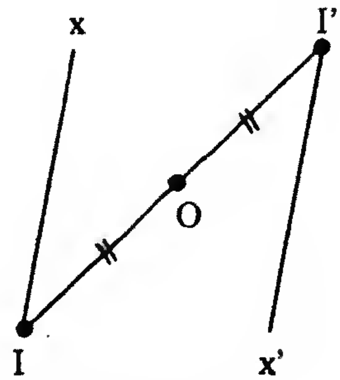
Trong phép đối xứng tâm S(O):

a) Ảnh của một đường thẳng D là một đường thẳng D' song song với D (Hình 29a).

b) Ảnh của một tia Ix là tia I'x' song song và ngược chiều với Ix, I' là ảnh của I (Hình 29b).



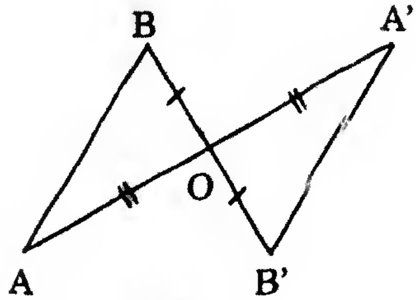
Hình 29a



Hình 29b

c) Ảnh của đoạn thẳng AB là đoạn thẳng A'B' song song và bằng AB, A' và B' theo thứ tự là ảnh của A và B (Hình 29c).

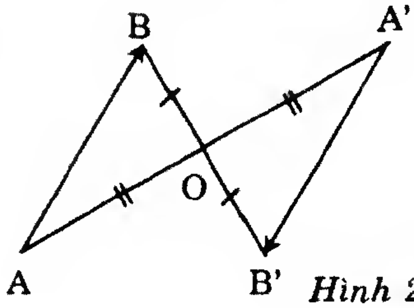
$$A \xmapsto{S(O)} A'$$
$$B \xmapsto{S(O)} B'$$
$$AB \xmapsto{S(O)} A'B' \overset{//}{=} AB.$$



Hình 29c

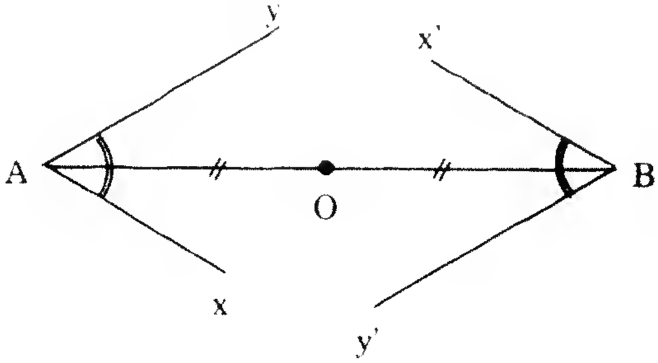
d) Ảnh của một vectơ là một vectơ đối của nó (Hình 29d).

$$A \xmapsto{S(O)} A'$$
$$B \xmapsto{S(O)} B'$$
$$\overrightarrow{AB} \xmapsto{S(O)} \overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$$



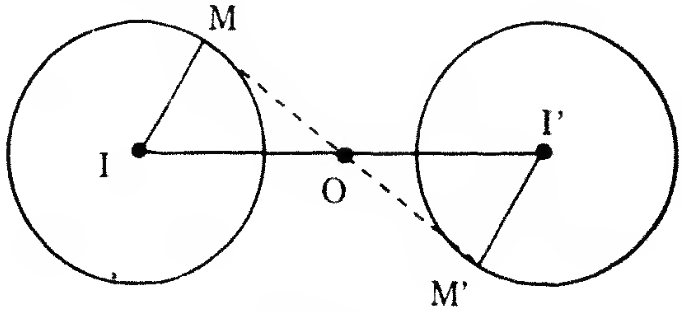
Hình 29d

e) Ảnh của một góc $\widehat{xAy}$ là một góc $\widehat{x'A'y'}$ bằng góc $\widehat{xAy}$, trong đó A'x' và A'y' theo thứ tự là ảnh của Ax và Ay cho bởi S(O) (Hình 29e).



Hình 29e

f) Ảnh của một đường tròn (I) là một đường tròn (I') bằng đường tròn (I), trong đó tâm I' là ảnh của tâm I cho bởi phép đối xứng S(O) (Hình 30).



Hình 30

4. *Đối xứng tâm của hai đường tròn bằng nhau cho trước*

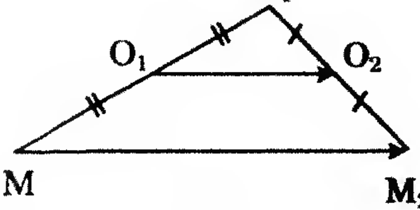
Bất kì 2 đường tròn nào bằng nhau cho trước cũng có thể xem là đối xứng của nhau trong một phép đối xứng tâm mà tâm đối xứng là trung điểm của đoạn nối tâm hai đường tròn đã cho.

5. *Tích của 2 phép đối xứng tâm*

Giả sử M_1 là đối xứng của M qua tâm O_1 và M_2 là đối xứng của M_1 qua tâm O_2 thì ta nói M_2 là ảnh của M cho bởi

$$M \xrightarrow{S(O_1)} M_1 \xrightarrow{S(O_2)} M_2$$

tích của hai phép đối xứng tâm $S(O_1).S(O_2)$



Hình 31

Ta có: $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}$

$$= (\overrightarrow{O_1M_1} + \overrightarrow{M_1O_2}) = 2\overrightarrow{O_1O_2}.$$

Do đó: M_2 là ảnh của M cho bởi phép tịnh tiến $T(2\overrightarrow{O_1O_2})$ (Hình 31).

Vậy: Tích của hai phép đối xứng tâm là một phép tịnh tiến

$$S(O_1).S(O_2) = T(2\overrightarrow{O_1O_2}).$$

Tương tự ta có:

$$S(O_2).S(O_1) = T(2\overrightarrow{O_2O_1}).$$

Tích của hai phép đối xứng tâm không có tính giao hoán:

$$S(O_1).S(O_2) \neq S(O_2).S(O_1)$$

$$S(O_1).S(O_2) = -[S(O_2).S(O_1)].$$

- *Chú ý:* Tích $S(O_1).S(O_1)$ là một phép biến đổi đồng nhất

$$M \xmapsto{S(O_1)} M_1 \xmapsto{S(O_1)} M_2 \equiv M.$$

II. Phép đối xứng qua trục (đối xứng trục)

1. Định nghĩa

a) Ảnh của một điểm

Trong mặt phẳng, cho đường thẳng cố định Δ và một điểm M Điểm M' được gọi là ảnh của điểm M trong phép đối xứng qua trục Δ, kí hiệu $S(\Delta)$, khi Δ là trung trực của đoạn MM'.

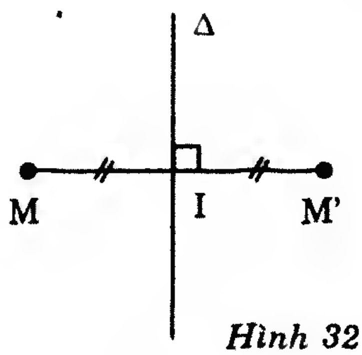
$$M \xmapsto{S(\Delta)} M'$$

Ngược lại: M cũng ảnh của M' cho bởi phép đối xứng $S(\Delta)$.

- Cách vẽ ảnh M' của điểm M cho bởi phép đối xứng $S(\Delta)$.

  Kẻ $MI \perp \Delta$ tại I.

  Trên tia đối của tia IM, lấy điểm M' sao cho IM' = IM, M' là ảnh của M cho bởi phép đối xứng $S(\Delta)$. (Hình 32).



Hình 32

- Δ gọi là trục đối xứng.
- Với mọi điểm $M \in \Delta$, ảnh M' của M cho bởi phép đối xứng $S(\Delta)$, trùng với M.

  Δ là tập hợp những điểm kép (điểm bất động) trong phép đối xứng $S(\Delta)$

$$\Delta \xmapsto{S(\Delta)} \Delta.$$

b) Ảnh của một hình:

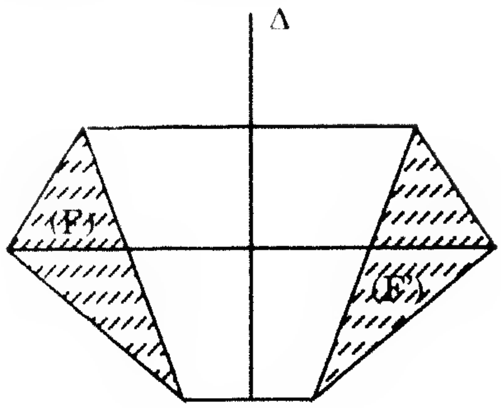
Khi điểm M vẽ một hình (F), thì ảnh M' của M cho bởi phép đối xứng $S(\Delta)$ sẽ vẽ một hình (F') gọi là ảnh (hay biến hình)

của hình (F) cho bởi phép đối xứng S(Δ) (Hình 33).

Do đó: Ảnh (biến hình) của một hình (F) cho bởi phép đối xứng S(Δ) là một hình (F') gồm tất cả các điểm ảnh của tất cả các điểm của hình (F) cho bởi phép đối xứng S(Δ).

$(F') = \{M \mid M \xrightarrow{S(\Delta)} M',\ M \in (F)\}$.

Nếu $(F') \equiv (F)$ thì Δ gọi là trục đối xứng của hình (F).



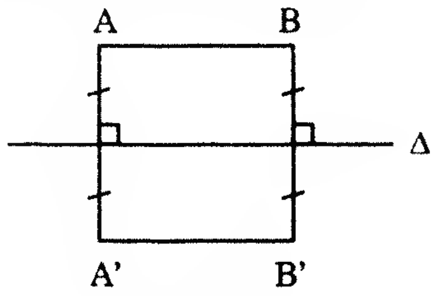
Hình 33

2. *Tính chất*

Trong mặt phẳng, phép đối xứng trục không phải là một phép dời hình, nhưng vẫn bảo toàn khoảng cách và độ lớn của góc.

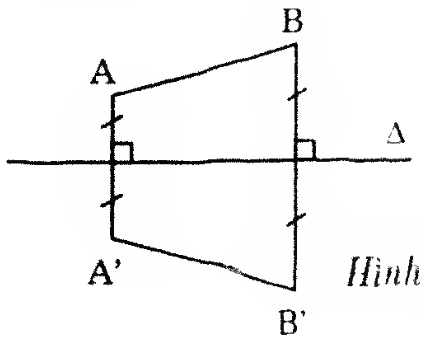
3. *Định lí:* Trong phép đối xứng S(Δ)

a) Ảnh của đoạn thẳng AB là đoạn thẳng A'B' = AB (Hình 34a).



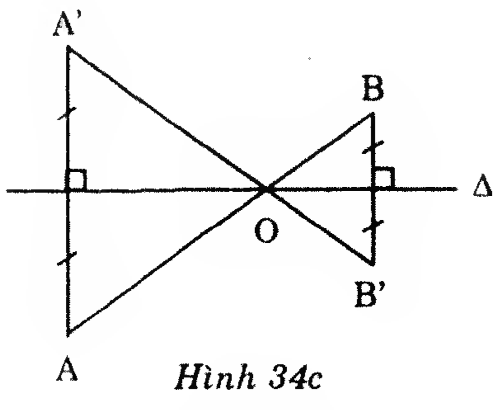
Hình 34b

– Nếu AB // Δ thì A'B' // Δ (Hình 34b).



Hình 34a

– Nếu AB cắt Δ ở một điểm O thì A'B' cũng cắt Δ ở O (Hình 34c).



Hình 34c

b) Ảnh của tam giác ABC là một tam giác A'B'C' bằng nhau ngược với tam giác ABC.

4. *Tích số của hai phép đối xứng trục*

$$S(\Delta_1).S(\Delta_2) = ?$$

a) Trường hợp hai trục đối xứng giao nhau

Gọi O là giao điểm của hai trục đối xứng Δ_1 và Δ_2.

Ta có: $M \xrightarrow{S(\Delta_1)} M' \xrightarrow{S(\Delta_2)} M''$

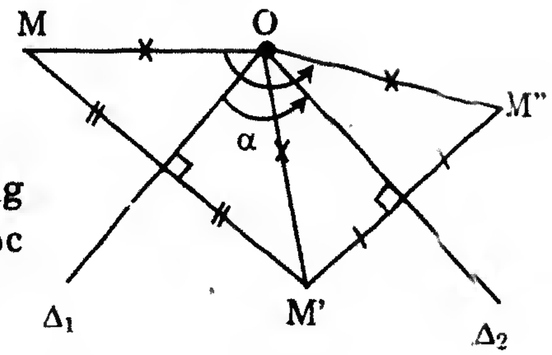
Suy ra: OM = OM' = OM"

$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM''}) = 2(\Delta_1, \Delta_2) = 2\alpha[2\pi]$

Do đó: M" là ảnh của M trong phép qua $R(0; 2\alpha)$, tâm O và góc quay 2α (Hình 35a) (Học sau)

$$S(\Delta_1).S(\Delta_2) = R(0; 2\alpha)$$

Tương tự, ta có: $S(\Delta_2).S(\Delta_1) = R(0; -2\alpha)$.



Hình 35a

b) Trường hợp hai trục đối xứng song song với nhau

Ta có: $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{HK}$

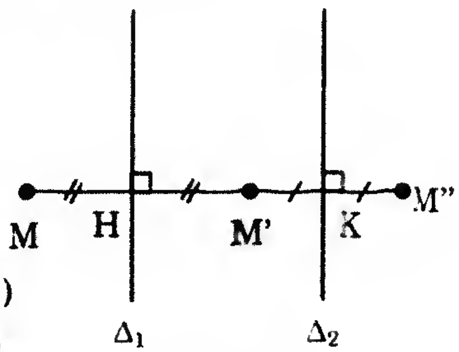
Do đó: M" là ảnh của M cho bởi phép tịnh tiến $T(2\overrightarrow{HK})$ với $HK = d(\Delta_1, \Delta_2)$ (Hình 35b).

$S(\Delta_1).S(\Delta_2) = T(2\overrightarrow{HK})$.

Tương tự, ta có: $S(\Delta_2).S(\Delta_1) = T(2\overrightarrow{KH})$

Vậy: Tích của hai phép đối xứng trục không có tính giao hoán

$$S(\Delta_1).S(\Delta_2) \neq S(\Delta_2).S(\Delta_1).$$



Hình 35b

LUYỆN TẬP

21. Cho hai đường thẳng song song D và D'.

Hỏi D và D' có thể xem là hình đối xứng của nhau?

1. Qua một điểm
2. Qua một trục

hay không?

Hướng dẫn

Dựng HH' vuông góc với D và D', H ∈ D và H' ∈ D'. Chú ý trung điểm I của đoạn HH'.

Giải

Xem hai đường song song D và D'.

Dựng một đường thẳng Δ vuông góc với D và D' theo thứ tự tại H và H' (Hình 36).

1. Lấy một điểm M bất kì thuộc đường thẳng D.

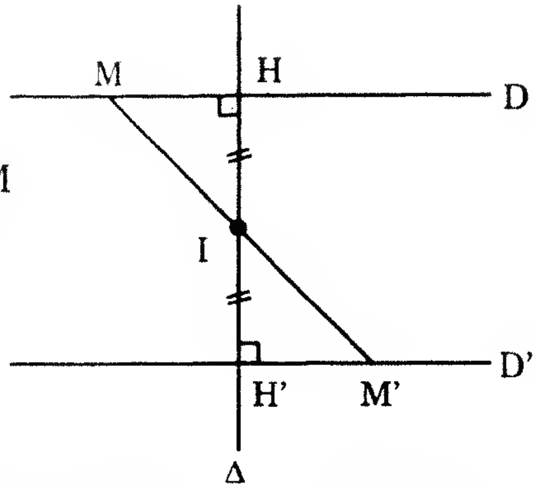
Gọi I là trung điểm của đoạn HH'. Đường thẳng MI cắt D' tại M'.

Ta có: ΔH'M'I = ΔHMI ⇒ IM' = IM

Suy ra M' là ảnh của điểm M trong phép đối xứng S(I) tâm I.

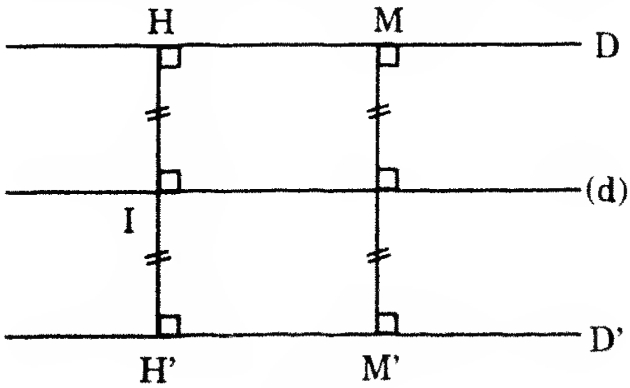
Khi M vẽ đường thẳng D thì M' vẽ đường thẳng D' và ngược lại.

Vậy: Hai đường thẳng song song D và D' đối xứng nhau qua tâm I, I là trung điểm của đoạn HH' vuông góc với D và D'.



Hình 36

2. Qua I, dựng đường thẳng (d) song song với D và D' (Hình 37)



Hình 37

Ta chứng minh dễ dàng D và D' đối xứng nhau qua (d).

22. Trong các hình sau, hình nào có một tâm đối xứng

A. ☐ Hình bình hành? B. ☐ Hình chữ nhật?

C. ☐ Hình thoi? D. ☐ Hình vuông?

E. ☐ A, B, C, D đều đúng.

23. Trong các hình sau, hình nào có một tâm đối xứng:

A. ☐ Hình tròn? B. ☐ Elip?

C. ☐ Hyperbol? D. ☐ Parabol?

E. ☐ A, B, C đúng. F. ☐ Tất cả đều sai.

24. Trong các hình sau hình nào có hai trục đối xứng:

A. ☐ Hình bình hành? B. ☐ Hình chữ nhật?

C. ☐ Hình thoi? D. ☐ B và C đều đúng

E. ☐ Các câu trên đều sai.

25. Trong các hình sau, hình nào có hai trục đối xứng?

A. ☐ Elip? B. ☐ Hyperbol?

C. ☐ Parabol? D. ☐ A và B đều đúng

E. ☐ Tất cả đều sai.

26. 1. Đường tròn có vô số tâm đối xứng:

A. ☐ Đúng B. ☐ Sai.

2. Đường tròn có vô số trục đối xứng

A. ☐ Đúng B. ☐ Sai.

27. Chứng minh rằng một đường thẳng bất kì:

1. Có vô số tâm đối xứng.
2. Có vô số trục đối xứng.

Giải

Lấy một đường thẳng D nào đó.

1. Lấy một điểm O bất kì thuộc D

Lấy điểm $M \in D$

Trên tia đối của OM, lấy một điểm M' sao cho:

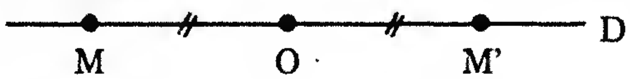
$$OM' = OM.$$

M' là ảnh của điểm M trong phép đối xứng S(O).

Khi M chạy trên đường thẳng D thì M' chạy trên đường thẳng D.

Ta suy ra O là tâm đối xứng của đường thẳng D.

O là một điểm bất kì thuộc D do đó đường thẳng D có vô số tâm đối xứng.



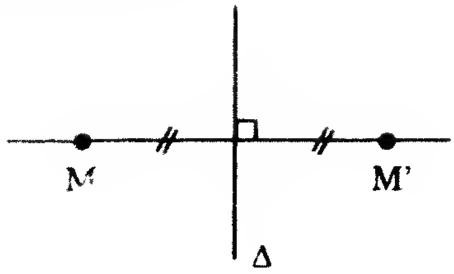
2. Dựng $\Delta \perp D$ tại O.

Suy ra Δ là trung trực của đoạn MM'.

Như vậy M' là ảnh của điểm M trong phép đối xứng $S(\Delta)$.

Khi M chạy trên đường thẳng D thì M' cũng chạy trên đường thẳng D.

Ta suy ra Δ là trục đối xứng của đường thẳng D.



O bất kì thuộc D nên đường thẳng D có vô số trục đối xứng

Vậy: • Một đường thẳng có vô số tâm đối xứng.

Một điểm bất kì của đường thẳng là tâm đối xứng của đường thẳng đó.

• Một đường thẳng có vô số trục đối xứng.

Mỗi đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước là trục đối xứng của đường thẳng đó.

28. Chứng minh rằng trong một tam giác, khoảng cách từ một đỉnh đến trực tâm bằng hai lần khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đến cạnh đối diện của đỉnh đó.

Hướng dẫn: Xem bài 5.

Học sinh tự giải.

29. Cho tam giác ABC trực tâm H nội tiếp trong đường tròn (O).

Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác HBC, HCA, HAB bằng nhau.

Hướng dẫn

Dựng đường cao AA', cắt đường tròn (O) tại H'

Chứng minh H' là điểm đối xứng của điểm H qua BC nghĩa là chứng minh $\overline{A'H'} = -\overline{A'H} \Rightarrow$ đpcm.

Giải

Dựng đường cao AA', cắt đường tròn (O) tại H'. Nối BH (Hình 38)

Ta có:

• $\widehat{B} = \widehat{A}_1$ (Vì sao?)

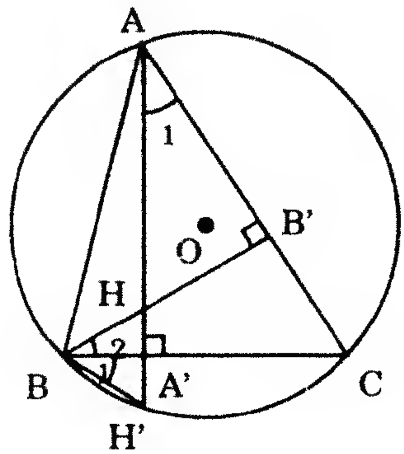
• $\widehat{B}_2 = \widehat{A}_1$ (góc nhọn có cạnh đôi một vuông góc)

$\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$

$\Rightarrow$ Tam giác BHH' cân tại B.

Suy ra BA' còn là đường trung trực

$\overline{A'H'} = -\overline{A'H}$.



Hình 38

H' là ảnh của H trong phép đối xứng S(BC) qua BC.

Ta có: $B \xrightarrow{S(BC)} B$

$C \xrightarrow{S(BC)} C$

$H \xrightarrow{S(BC)} H'$

$\Rightarrow \Delta HBC = \Delta H'BC$

Do đó đường tròn ngoại tiếp ΔABC bằng đường tròn (O).

Vậy: (HBC) = (HCA) = (HAB) = (O).

(Kí hiệu (HBC) chỉ đường tròn ngoại tiếp ΔHBC).

30. Cho hình bình hành ABCD tâm O, có hai đỉnh A và C cố định. Tìm tập hợp đỉnh D trong các trường hợp sau:

1. Cạnh AB = a không đổi.
2. B có hình chiếu lên AC là B' cố định.
3. B di động trên đường tròn (γ) tâm I, bán kính R.

Hướng dẫn

1. Ta có: $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB} \Rightarrow$ đpcm.
2. AC cố định, B' cố định ⇒ B thuộc đường nào?

Giải

Nhận xét rằng A và C cố định nên đường thẳng AC và điểm O cố định.

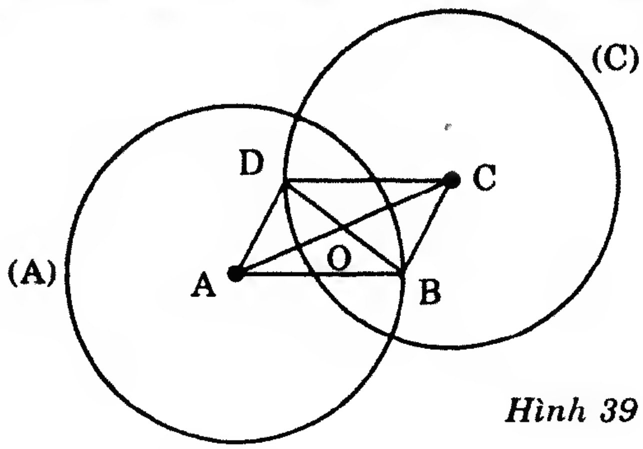
B và D đối xứng nhau qua O.

1. Cạnh AB có độ dài không đổi bằng a nên B chạy trên đường tròn (A) tâm A, bán kính a.

   D là đối xứng của B qua O.

   C là đối xứng của A qua O.

   Do đó tập hợp các điểm D là đường tròn (C; a) ảnh của đường tròn (A; a) cho bởi phép đối xứng S(O) tâm O (Hình 39).



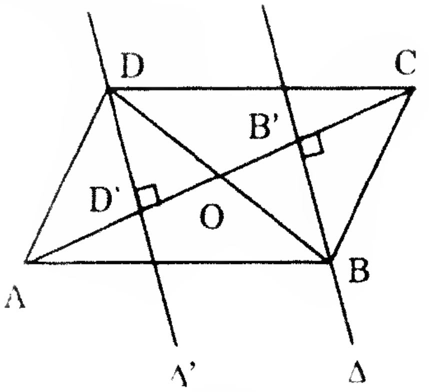
Hình 39

2. AC cố định, B' cố định nên đường thẳng BB' cố định.

Suy ra B chạy trên đường thẳng Δ vuông góc với AC tại B'.

Do đó tập hợp các điểm D là đường thẳng Δ', ảnh của đường thẳng Δ cho bởi phép đối xứng S(O) tâm O.

Δ' song song với Δ, vuông góc với AC tại D', D' là ảnh của B' trong phép đối xứng S(O) (Hình 40).



Hình 40

3. Học sinh tự giải.

31. Cho hình vuông ABCD tâm O. Gọi T là phép biến hình, biến mỗi điểm M nằm trong mặt phẳng (ABCD) thành một điểm M' sao cho: $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$. Hãy xác định T.

Hướng dẫn

Viết $\overrightarrow{MM'}$ dưới dạng: $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) - (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})$.

Giải

Ta có thể viết: $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$

$$= 2\overrightarrow{MA} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) - (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}).$$

Gọi I và J theo thứ tự là trung điểm của AB và CD ta có:

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

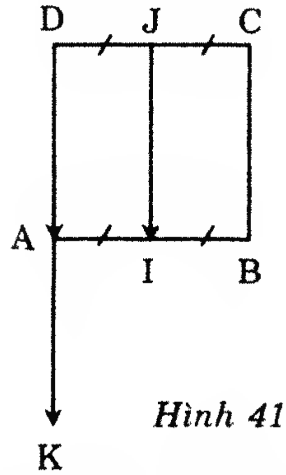
$\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MJ}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{MJ}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MA} + 2(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MJ})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{JI}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{JI} = 2\overrightarrow{DA}$ (Hình 41).



Hình 41

Gọi K là trung điểm của MM'.

Ta có: $\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AK}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{DA}$

Do đó K là ảnh của D trong phép đối xứng S(A) tâm A. Suy ra K cố định.

Ta có: M' là ảnh của M trong phép đối xứng S(K) tâm K.

Vậy: Phép biến đổi T đã cho là một phép đối xứng tâm.

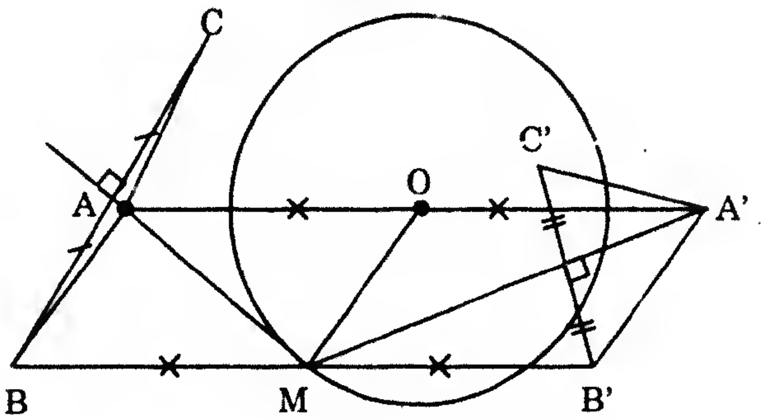
32. Cho đường tròn (O; R) và hai điểm cố định A và A' đối xứng nhau qua O. Từ điểm M nằm trên đường tròn (O), kẻ $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{OA'}$. Tìm tập hợp

1. Điểm C đối xứng của B qua AM.
2. Điểm C' đối xứng của B' qua A'M.

Hướng dẫn

* So sánh AC và AB; A'C' và A'B'.

Giải



Hình 42

1. Ta có: AC = AB (Đối xứng qua AM)

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OA} \Rightarrow AB = OM = R$$
$$\Rightarrow AC = R.$$

Do đó C nằm trên đường tròn tâm A bán kính R (Hình 42)

Khi điểm M chạy trên đường tròn (O; R) ta có tập hợp các điểm C là đường tròn (A; R).

Nhận xét rằng tập hợp các điểm B cũng chính là đường tròn (O; R).

2. Tương tự: Tập hợp các điểm C' là đường tròn (A'; R) (Hình 42).

33. Cho đường thẳng D và hai điểm A, B. Hãy dựng điểm M $\in$ D sao cho:

1. MA + MB đạt giá trị nhỏ nhất khi A và B nằm cùng một phía đối với D.
2. $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất khi A và B nằm về hai phía của D.

Hướng dẫn

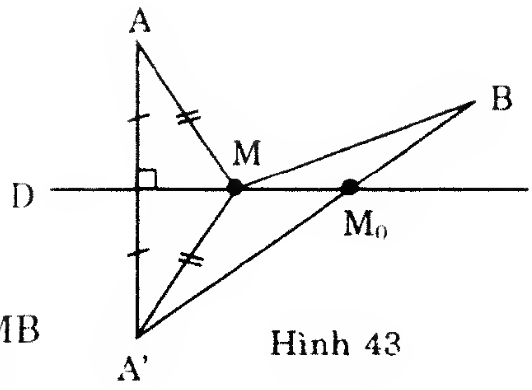
1. Dựng A' là điểm đối xứng của A qua D (hoặc B' là điểm đối xứng của B qua D).
2. Có thể giả sử MA > MB. Nếu không thì ta hoán vị A và B cho nhau.

Gọi B' là điểm đối xứng của B qua D và lấy B" ∈ MA sao cho MB" = MB. So sánh AB" và AB'

Giải

1. Gọi A' là ảnh của A cho bởi phép đối xứng S(D) qua trục D.

M là một điểm bất kì thuộc D.



Hình 43

Ta có:

MA' = MA ⇒ MA + MB = MA' + MB

⇒ MA + MB ≥ A'B.

Do đó MA + MB nhỏ nhất là bằng A'B

⇒ min(MA + MB) = min(MA' + MB) = A'B.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi ba điểm A', M, B thẳng hàng nghĩa là M là giao điểm của A'B và đường thẳng D (Hình 43).

Vậy: MA + MB đạt giá trị nhỏ nhất khi M trùng với M_0, giao điểm của A'B và đường thẳng D.

* ***Chú ý:*** Có thể xét B' là ảnh của B cho bởi S(D). Điểm M phải tìm là giao điểm M_0 của AB' với D.

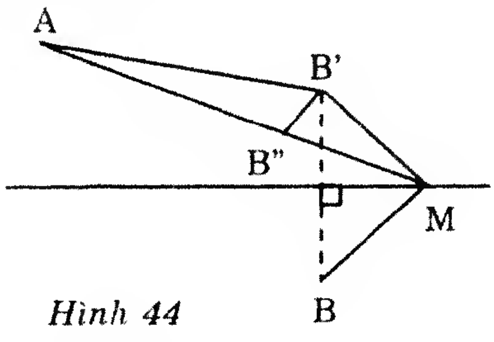
2. Giả sử MA > MB

Gọi B' là ảnh của B trong phép đối xứng S(D).

Trên tia MA, lấy điểm B" sao cho MB" = MB (Hình 44).

Ta có: |MA – MB| = MA – MB

= MA – MB" = AB"



Hình 44

Xét ΔMAB". Ta có:

MA ≤ AB' + MB'

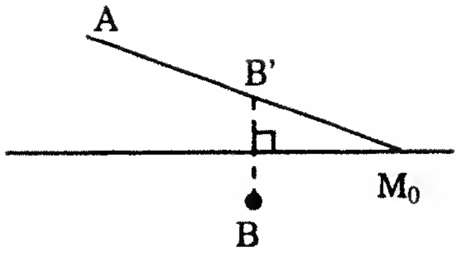
⇔ MA – MB' ≤ AB'

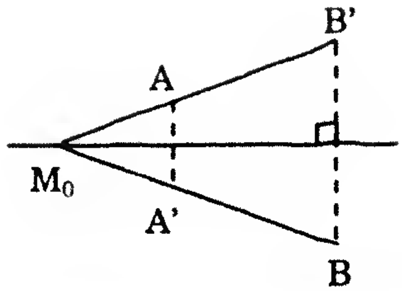
⇔ MA – MB ≤ AB'

Do đó |MA – MB| đạt giá trị lớn nhất là bằng A'B.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi ba điểm A, B', M thẳng hàng hay M là giao điểm của AB' và đường thẳng D.

Vậy: |MA – MB| đạt giá trị lớn nhất khi M trùng với giao điểm M_0 của AB' và D (hoặc của BA' và D) (Hình 45).





Hình 45

34. Cho đường tròn (O) tâm O bán kính R, đường kính AB và một dây CD, CD cắt AB tại E ≠ 0 sao cho $\widehat{AEC} = 45^0$.

Đường tròn (α) ngoại tiếp ΔOCE cắt (O) tại điểm thứ hai F.

Chứng minh rằng F là ảnh của D cho bởi phép đối xứng S(AB).

Hướng dẫn

Chứng minh góc $\widehat{FOC} = 90^0$.

Giải

Ta có: $\widehat{OFC} = \widehat{OEC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung OC)

$\Rightarrow \widehat{OFC} = 45^0$.

Dựng OI ⊥ CF ⇒ I là trung điểm của dây CF.

ΔIOF vuông tại I, có góc $\widehat{OFC} = 45^0$ nên vuông cân đỉnh I ⇒ $\widehat{FOI} = 45^0$

$\Rightarrow \widehat{FOC} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{FDC} = 45^0$ (Vì sao?).

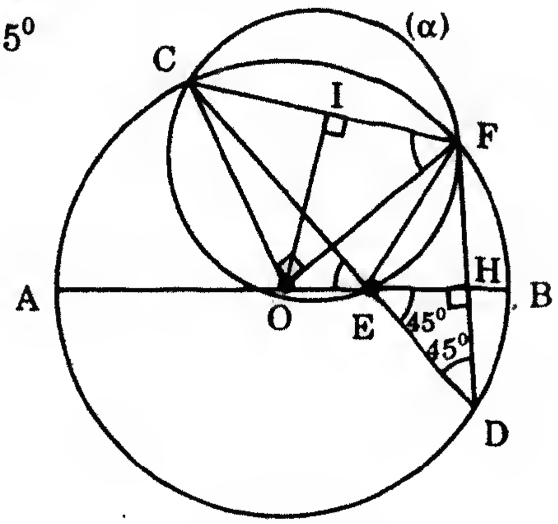
Ta lại có:

$\widehat{BED} = \widehat{OEC} = 45^0$ (Vì sao?)

$\Rightarrow \widehat{EHD} = 90^0$.

H là giao điểm của FD và đường kính AB

⇒ FD ⊥ AB tại H.



Hình 46

Vậy: D là ảnh của F cho bởi phép đối xứng S(AB), trục là đường thẳng AB.

Nhận xét: $\widehat{FEC} = 90^0$.

Đường tròn (α) ngoại tiếp ΔOCE có tâm là trung điểm của dây CF (Hình 46).

35. Dựng tam giác ABC biết đỉnh A, trọng tâm G cho trước và hai đỉnh B, C nằm trên hai đường thẳng cố định D, Δ ($B \in D$; $C \in \Delta$).

Hướng dẫn

Dựng điểm A' đối xứng của điểm A qua trọng tâm G. Từ đó dựng được trung điểm I của BC. Suy ra B và C đối xứng nhau qua I.

Giải

Giả sử ta đã dựng được tam giác ABC có trọng tâm G, với $B \in D$ và $C \in \Delta$.

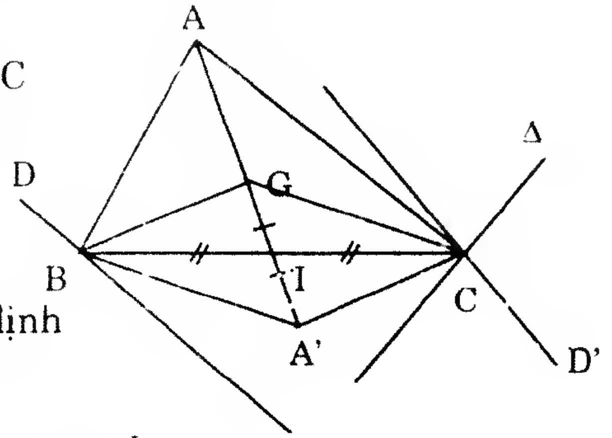
Gọi I là trung điểm của cạnh BC

$\Rightarrow \vec{IG} = \frac{1}{2}\vec{GA}$.

Suy ra I cố định.

(Hoặc dựng $\vec{GA'} = -\vec{GA}$, A' cô định

$\Rightarrow$ I cố định).



Hình 47

Do đó B và C đối xứng nhau qua I. Phép đối xứng S(I) biến đường thẳng D thành đường thẳng D' song song với D, đường thẳng D' cắt đường thẳng Δ tại C.

Dựng $\vec{IB} = -\vec{IC}$. Đương nhiên $B \in D$. ΔABC là tam giác phải dựng.

Ta chứng minh dễ dàng G là trọng tâm của ΔABC (Hình 47).

+ Nếu D // Δ thì $D' \equiv \Delta$: Bài toán sẽ có vô số nghiệm hình.

Chương III. PHÉP VỊ TỰ

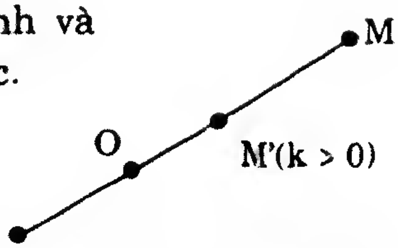
KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa:

a) Ảnh của một điểm

Trong mặt phẳng, cho điểm O cố định và một điểm M; $k \neq 1$ là một số cho trước.

Điểm M' được gọi là ảnh của điểm M trong phép vị tự tâm O, tỉ số vị tự k, $k \neq 1$, kí hiệu H(O; k) khi $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$



Hình 48

Ta có: $M \xrightarrow{H(O;k)} M'$: $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

– Nếu $k > 0$: Phép vị tự thuận hay phép vị tự dương;

– Nếu $k < 0$: Phép vị tự nghịch hay phép vị tự âm. (Hình 48)

Ngược lại: M là ảnh của M' trong phép vị tự $H(O; \frac{1}{k})$

• Tâm vị tự O là điểm kép.

Nếu $k = -1$: Phép vị tự trở thành phép đối xứng tâm

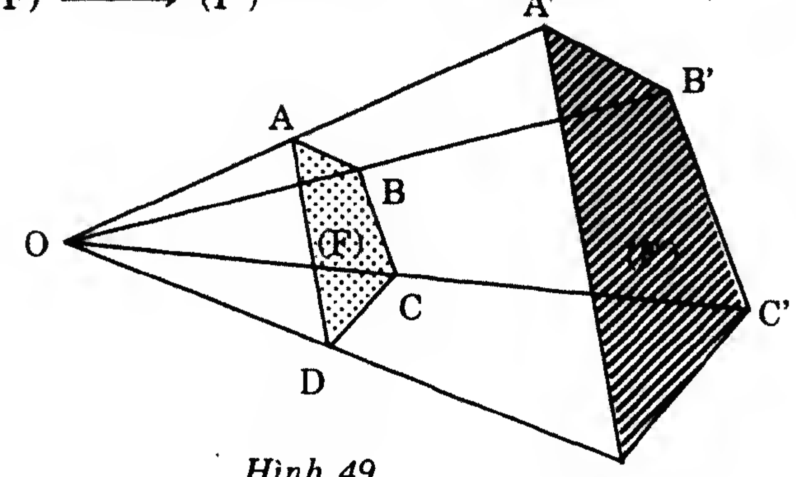
b) Ảnh của một hình

Khi M vẽ hình (F) thì M' vẽ hình (F') gọi là ảnh của hình (F) cho bởi phép vị tự H(O; k).

Vậy: Ảnh của hình (F) trong phép vị tự H(0; k) là hình (F') gồm tất cả những điểm ảnh của tất cả những điểm của hình (F) cho bởi phép vị tự H(O; k) (hình 49).

Như vậy, phép vị tự là một phép biến hình

$$(F) \xrightarrow{H(O;k)} (F')$$



Hình 49

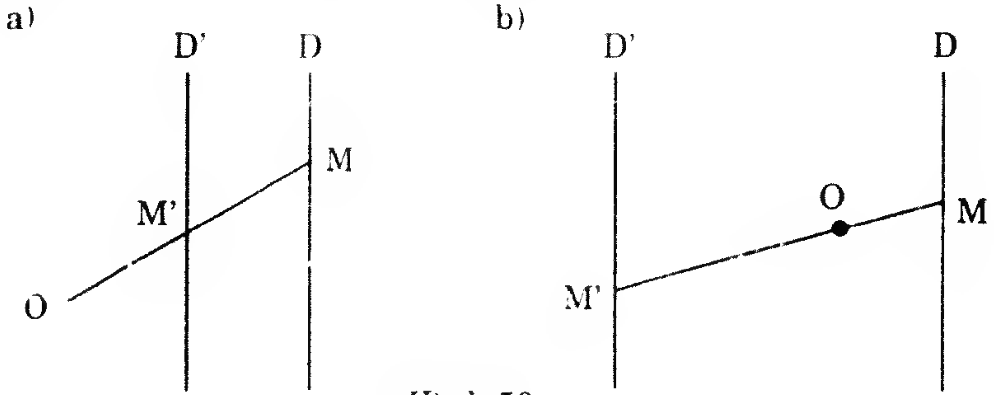
2. *Tính chất*

Trong phép vị tự H(O; k):

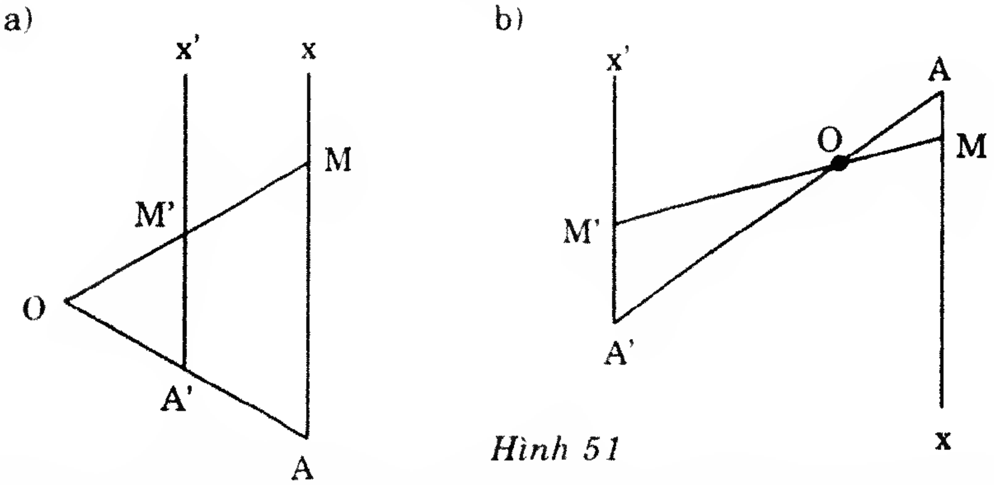
a) Ảnh của một đường thẳng D không đi qua O là một đường thẳng D' song song với D (Hình 50).

Nếu D đi qua O thì D là ảnh của chính nó.

b) Ảnh của một tia Ax là tia A'x' song song và cùng chiều với Ax nếu $k > 0$; song song và ngược chiều với Ax nếu $k < 0$; A' là ảnh của A cho bởi phép vị tự H(O; k) (Hình 51).



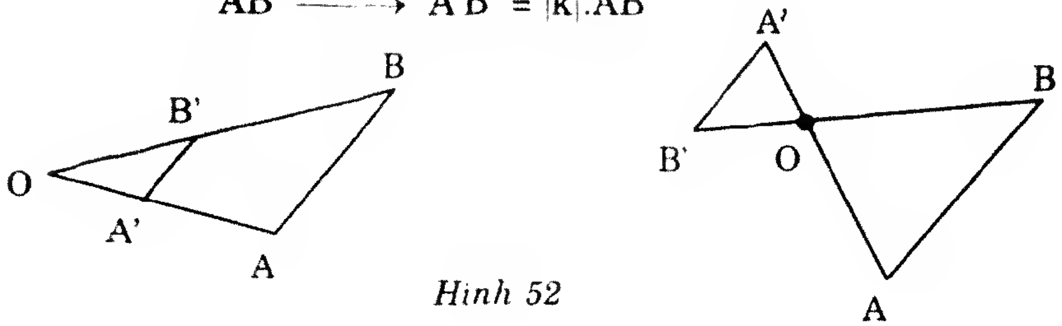
Hình 50



Hình 51

c) Ảnh của đoạn thẳng AB là đoạn thẳng A'B' sao cho $A'B' = |k|.AB$ (Hình 52)

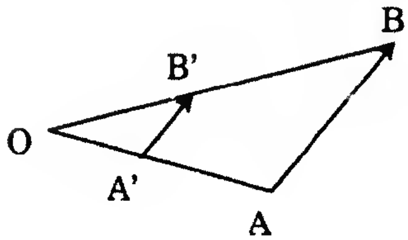
$$A \xrightarrow{H(O,k)} A'$$
$$B \xrightarrow{H(O,k)} B'$$
$$AB \xrightarrow{H(O,k)} A'B' = |k|.AB$$

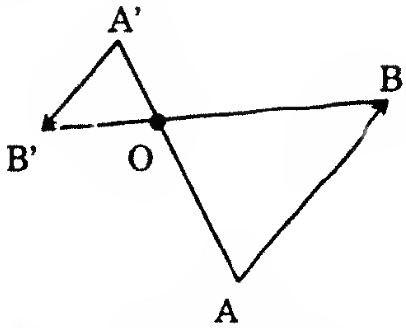


Hình 52

d) Ảnh của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là vectơ $\overrightarrow{A'B'}$ cùng phương cùng chiều với $\overrightarrow{AB}$ nếu $k > 0$ và ngược chiều với $\overrightarrow{AB}$ nếu $k < 0$ và $|\overrightarrow{A'B'}| = |k|.|\overrightarrow{AB}|$ (Hình 53).

$$A \longmapsto A'$$
$$B \longmapsto B'$$
$$\overrightarrow{AB} \longrightarrow \overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$$

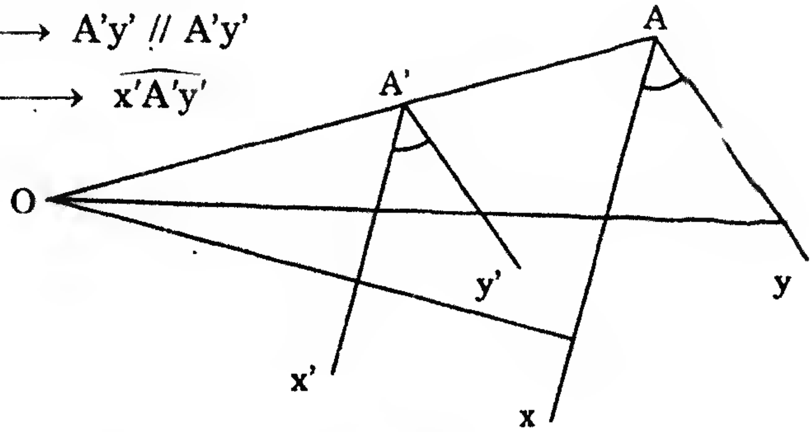




Hình 53

e) Ảnh của góc $\widehat{xAy}$ là góc $\widehat{x'A'y'}$ bằng góc $\widehat{xAy}$ (Hình 54.

$$A \longmapsto A'$$
$$Ax \longrightarrow A'x' \,//\, Ax$$
$$Ay \longrightarrow A'y' \,//\, A'y'$$
$$\widehat{xAy} \longrightarrow \widehat{x'A'y'}$$



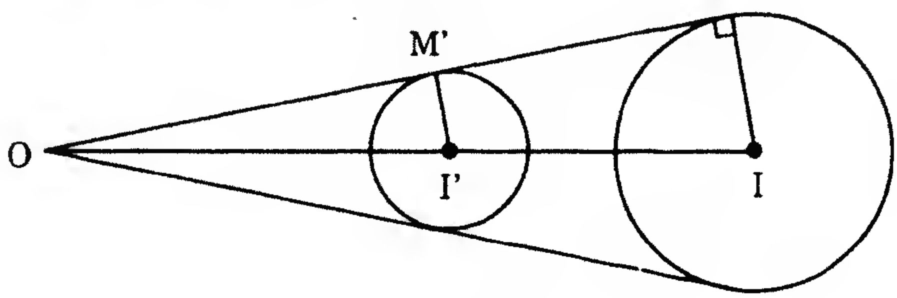
Hình 54

f) Ảnh của một đường tròn (I; R) là đường tròn (I'; R') có:

– Tâm I' là ảnh của tâm I cho bởi phép vị tự H(O; k).

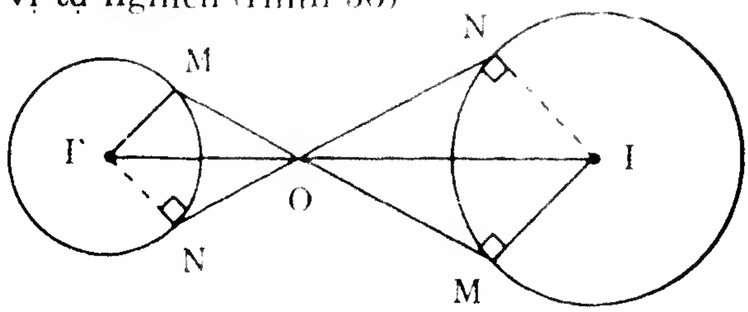
– Bán kính $R' = |k|.R$.

+ Phép vị tự thuận (Hình 55)



Hình 55

+ Phép vị tự nghịch (Hình 56)



Hình 56

Nhận xét: Nếu (I') là ảnh của (I) trong phép vị tự H(O; k) thì (I) là ảnh của (I') trong phép vị tự H(O; $\frac{1}{k}$). Ta nói chúng vị tự nhau.

Khi hai đường tròn vị tự nhau thì các tiếp tuyến chung ngoài đi qua tâm vị tự nếu k > 0; các tiếp tuyến chung trong đi qua tâm vị tự nếu k < 0.

4. Sự vị tự của hai đường tròn cho trước

Hai đường tròn (I; R) và (I'; R') cho trước có thể xem là hình vị tự của nhau bằng hai phép vị tự.

- Phép vị tự thuận H(O; k), tâm vị tự O là giao điểm của các tiếp tuyến chung ngoài với đường nối tâm II', tỉ số vị tự k bằng tỉ số của hai bán kính tương ứng.

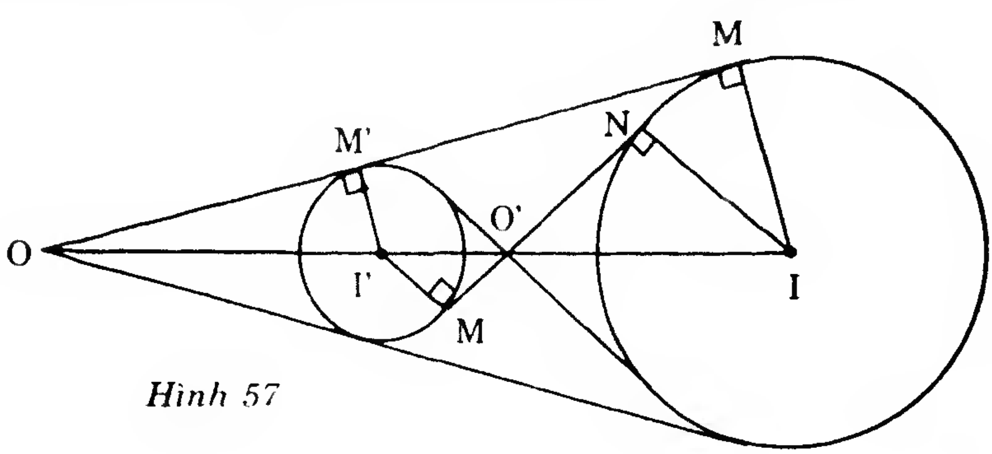
$$(I) \xrightarrow{H(O;k)} (I');\ k = \frac{R'}{R}$$

$$(I') \xrightarrow{H(O;k)} (I);\ k = \frac{R}{R'}$$

- Phép vị tự nghịch H(O'; k'), tâm vị tự O' là giao điểm của các tiếp tuyến chung trong với đường nối tâm II', tỉ số vị tự k' = –k.

$$(k' = -\frac{R'}{R} \text{ hoặc } k' = -\frac{R}{R'})$$

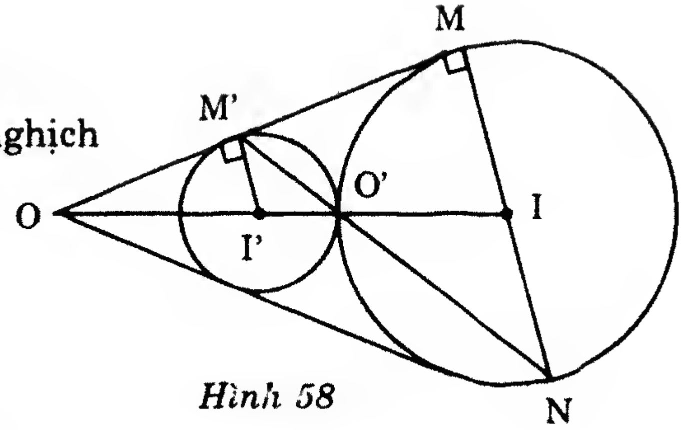
a) Trường hợp hai đường tròn ngoài nhau (Hình 57).



Hình 57

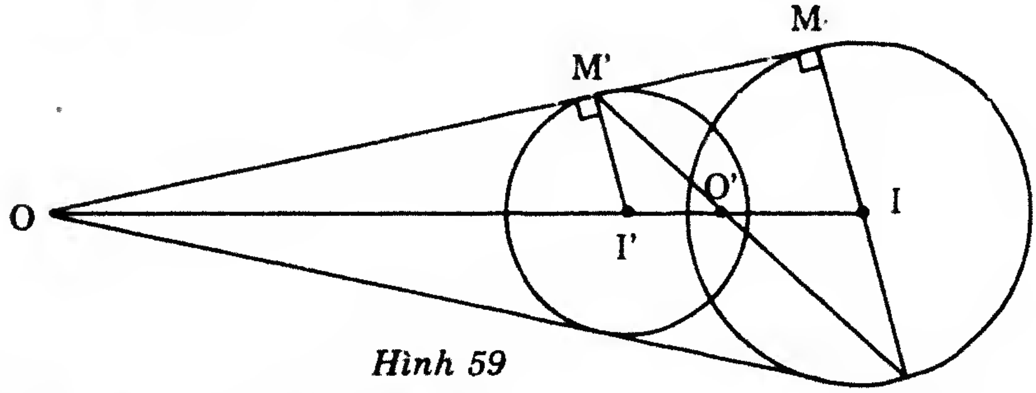
b) Trường hợp hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau (Hình 58).

Tiếp điểm là tâm vị tự nghịch



Hình 58

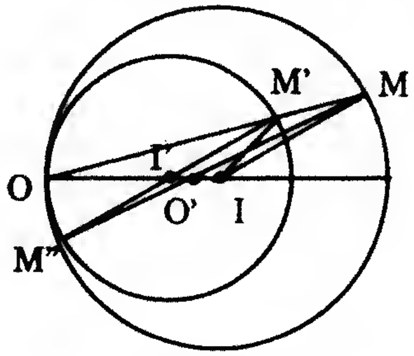
c) Trường hợp hai đường tròn cắt nhau (Hình 59).



Hình 59

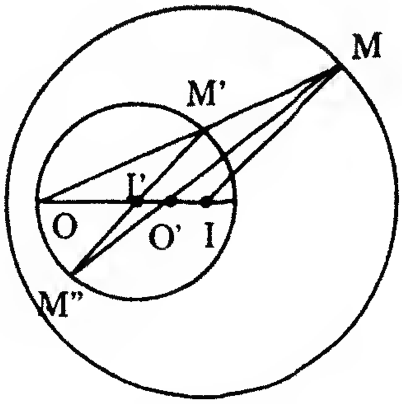
d) Trường hợp hai đường tròn tiếp xúc trong (Hình 60).

Tiếp điểm là tâm vị tự thuận.



Hình 60

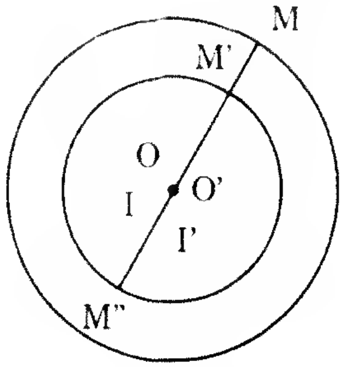
e) Trường hợp hai đường tròn chứa nhau (Hình 61).



Hình 61

f) Trường hợp hai đường tròn đồng tâm (Hình 62).

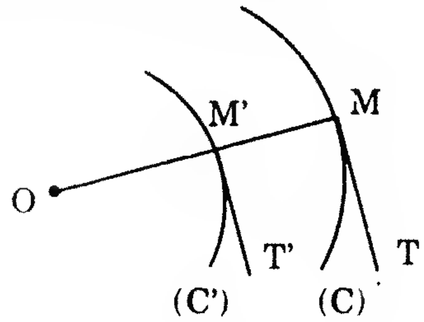
Tâm vị tự thuận và tâm vị tự nghịch trùng với tâm các đường tròn.



Hình 62

Trong các trường hợp tổng quat: tâm của hai đường tròn và các tâm vị tự tạo thành một hàng điểm điều hòa. (không học).

5. ***Định lí:*** Các tiếp tuyến của hai đường cong vị tự nhau tại hai điểm đối ứng thì song song (Hình 63).



Hình 63

6. ***Tích của hai phép vị tự***

a) Tích của hai phép vị tự đồng tâm

$H(O;\, k).H(O;\, k') = ?$

$M \xrightarrow{H(O;k)} M' \xrightarrow{H(O;k')} M''$

Ta có: $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{OM''} = k'\overrightarrow{OM'} \Rightarrow \overrightarrow{OM''} = kk'\overrightarrow{OM'}$.

Điều này chứng tỏ: M" là ảnh của M trong phép vị tự H(O; kk'):

$$H(O;\, k).H(O;\, k') = H(O;\, kk')$$

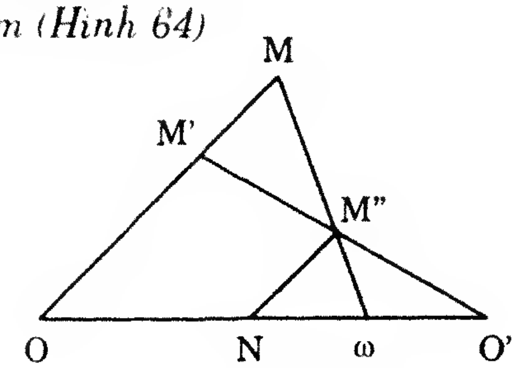
b) Tích của hai phép vị tự khác tâm (Hình 64)

$H(O;\, k).H(O';\, k') = ?$

$M \xrightarrow{H(O;k)} M' \xrightarrow{H(O;k')} M''$

Ta có: $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ (1)

$\overrightarrow{O'M'} = k'\overrightarrow{O'M''}$ (2)



Hình 64

Kẻ M"N // OM. Ta có: $\dfrac{\overline{NM''}}{\overline{OM'}} = \dfrac{\overline{O'N}}{\overline{O'O}} = \dfrac{\overline{O'M''}}{\overline{O'M'}} = k'$.

$\Rightarrow$ N cố định.

Gọi ω là giao điểm của MM" với OO'. Ta có $\dfrac{\overline{\omega M''}}{\overline{\omega M}} = \dfrac{\overline{\omega N}}{\overline{\omega O}} = \dfrac{\overline{NM''}}{\overline{OM}}$

$$\Rightarrow \frac{\overline{\omega M''}}{\overline{\omega M}} = \frac{\overline{NM''}}{\overline{OM'}} = \frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = k'k.$$

Điều này chứng tỏ M" là ảnh của M cho bởi phép vị tự H(ω, kk')

(Có thể dùng định lí Ménélaiis để chứng minh). xxx

LUYỆN TẬP

36. Cho tam giác ABC có cạnh BC cố định, chiều cao AH = h, khôn đổi. Tìm tập hợp trọng tâm G của ΔABC khi A di động.

Hướng dẫn: Xem phép vị tự H(I; $\frac{1}{3}$) với I là trung điểm củ cạnh BC.

Giải

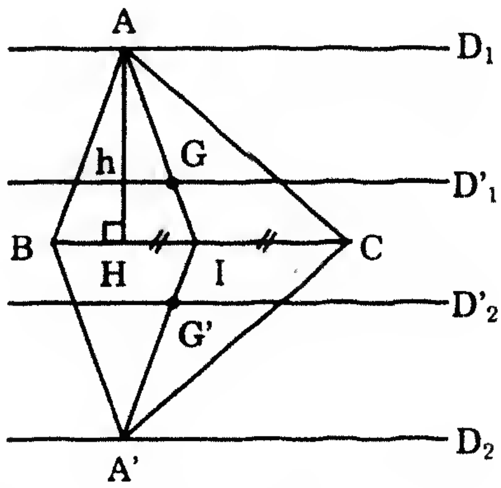
Gọi I là trung điểm của cạnh BC; BC cố định nên I cố địn (Hình 65).

Theo tính chất của trọng tâm, ta có $\overline{IG} = \frac{1}{3}\overline{IA}$.

Suy ra G là ảnh của A trong phép vị tự H(0; $\frac{1}{3}$) tâm O, tỉ số k = $\frac{1}{3}$.

Vì AH = h không đổi nên tập hợp các điểm A là hai đường thẳng D_1 và D_2 song song với BC, nằm về hai phía của BC và cách BC một đoạn bằng h.

Do đó tập hợp các điểm G là hai đường thẳng D'_1 và D'_2 theo thứ tự là ảnh của D_1 và D_2 cho bởi phép vị tự H(J; $\frac{1}{3}$).



Hình 65

D'_1 và D'_2 nằm về hai phía của BC song song với BC và cách BC một đoạn bằng $\frac{h}{3}$.

* Nếu bỏ giả thiết AH = h không đổi mà thay vào đó là độ dài trung tuyến m_a ứng với cạnh BC không đổi thì tập hợp trọng tâm G của ΔABC sẽ là đường gì?

7. Cho tam giác ABC có cạnh BC cố định. Tìm tập hợp (T) trọng tâm G của ΔABC trong các trường hợp sau đây:

1. Tổng các khoảng cách từ A đến B và C bằng một độ dài 2a không đổi (2a > BC).
2. Giá trị tuyệt đối của hiệu số các khoảng cách từ A đến B và C bằng một độ dài 2a không đổi (2a < BC).

Hướng dẫn

Xem lại hình học lớp 10.

Giải

Đặt BC = 2c.

Gọi O là trung điểm của cạnh BC.

Chọn O là làm điểm gốc của hệ trục tọa độ.

Trục hoành là trục $\vec{BC}$.

Ta có: B(−c; 0), C(c; 0).

1. Theo giả thiết ta có:

AB + AC = 2a (2a > 2c).

Ta suy ra điểm A chạy trên elip (E) tâm O có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

với $b^2 = a^2 - c^2$, nhận B và C làm hai tiêu điểm.

Ta lại có G là ảnh của A trong phép vị tự $H(0; \frac{1}{3})$. (Xem bài 36).

Do đó khi A chạy trên elip (E) thì tập hợp (T) các điểm G là elip (E'), ảnh của elip (E) cho bởi phép vị tự $H(0; \frac{1}{3})$.

Tọa độ của G: $\begin{cases} x_G = \frac{1}{3} x_A \\ y_G = \frac{1}{3} y_A \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{(3x_G)^2}{a^2} + \frac{(3y_G)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{9x_G^2}{a^2} + \frac{9y_G^2}{b^2} = 1.$$

Vậy: Tập hợp (T) là elip (E).

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{9}} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{9}} = 1$$

tâm O, nhận $B'(-\frac{c}{3}; 0)$, $C(\frac{c}{3}; 0)$ làm tiêu điểm.

2. Học sinh tự giải.

38. Cho hai đường tròn (α) và (β) đồng tâm O, bán kính R và R' (R' < R
A là một điểm cố định thuộc (β), M là một điểm di động trên (β). K
dây BC của (α), BC vuông góc với AM tại A và cắt (β) tại D.

1. Chứng minh rằng các tam giác MAD và MBC có trọng tâm cố địnl
2. Tìm tập hợp đỉnh thứ tư E của hình chữ nhật MABE.

Hướng dẫn

Gọi I là trung điểm của dây AD. Suy ra được điều gì?

Giải

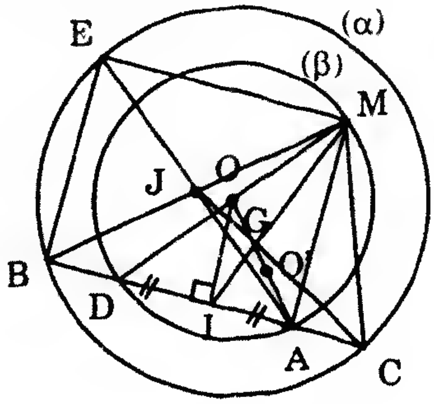
1. Vì AD $\perp$ MA nên MD là đường kính của đường tròn (β).

Trong tam giác MAD, AO là trung tuyến, A và O cố định nên trọng tâm G của ΔMAD cố định (Hình 66).

Gọi I là giao điểm của MG và AD. Suy ra I là trung điểm của AD.

Ta có: OI $\perp$ AD $\Rightarrow$ OI $\perp$ BC.

Trong đường tròn (α), OI $\perp$ BC nên I là trung điểm của BC.



Hình 66

Suy ra MI là trung tuyến ứng với cạnh BC của ΔMBC.

Do đó G là trọng tâm của ΔMBC.

Vậy: Các tam giác MAD và MBC có cùng trọng tâm G cố định

2. Gọi J là giao điểm của CG và MB.

Suy ra J là trung điểm của MB.

Do đó J là tâm của hình vuông MABE.

Ta có: $\overrightarrow{GJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$.

Suy ra J là ảnh của C trong phép vị tự $H(G; -\frac{1}{2})$ tâm G tỉ số $k = -\frac{1}{2}$

Khi M di động trên đường tròn (β) tâm O bán kính R' thì C di động trên đường (α) tâm O bán kính R, tập hợp các điểm J là đường tròn (γ), ảnh của đường tròn (α) cho bởi phép vị tự $H(G; -\frac{1}{2})$

(γ) có tâm O', ảnh của O trong phép vị tự $H(G; -\frac{1}{2})$.

$$\vec{GO'} = -\frac{1}{2}\vec{GO}$$

$$\vec{GO'} = -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}\vec{GA}) = \frac{1}{4}\vec{GA}$$

$$\Rightarrow \vec{OO'} = \vec{OG} + \vec{GO'} = \vec{OG} + \frac{1}{2}\vec{OG} = \frac{3}{2}\vec{OG}$$

$$\Rightarrow \vec{OO'} = \frac{3}{2}.\frac{1}{3}\vec{OA} = \frac{1}{2}\vec{OA}$$

O' là trung điểm của OA.

Suy ra đường tròn (γ) có bán kính $\rho = \frac{R}{2}$.

Ta lại có: $\vec{AE} = 2\vec{AJ}$.

Suy ra E là ảnh của J trong phép vị tự H(A; 2) tâm A tỉ số k = 2.

Do đó tập hợp các điểm E là đường tròn (φ), ảnh của đường tròn (γ) cho bởi phép vị tự H(A; 2).

Ta có: $\vec{AO} = 2\vec{AO'}$.

Chứng tỏ O' là ảnh của O trong phép vị tự H(A; 2).

Suy ra (φ) có tâm O, bán kính r = 2ρ = R.

Ta suy ra (φ) trùng với đường tròn (α).

Vậy: Tập hợp các điểm E là đường tròn (α).

39. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R), trực tâm H; 3 đường cao AA', BB', CC'; 3 trung tuyến AM, BN, CP.

Gọi α, β, γ theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng HA, HB, HC

Chứng minh rằng 9 điểm A', B', C', M, N, P, α, β, γ cùng nằm trên một đường tròn

Hãy xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.

Giải

Trong các tam giác ABC và HBC, PN và βγ là đường trung bình, ta có:

$PN \parallel BC$ và $PN = \frac{1}{2}BC$

$\beta\gamma \parallel BC$ và $\beta\gamma = \frac{1}{2}BC$

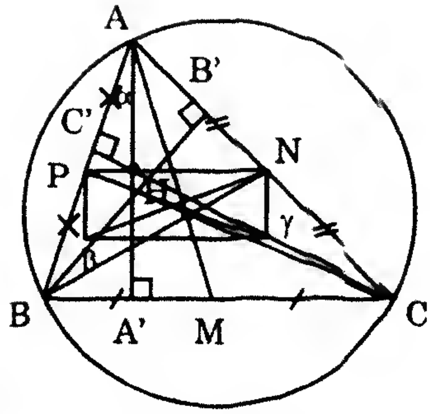
$\Rightarrow \beta\gamma \parallel PN$ và $\beta\gamma = PN$

$\Rightarrow \beta\gamma NP$ là một hình bình hành

Trong ΔHAB, βP là đường trung bình

Suy ra: $\beta B \parallel HA \Rightarrow \beta P \perp BC \Rightarrow \beta P \perp \beta\gamma$

Do đó $\beta\gamma NP$ là một hình chữ nhật

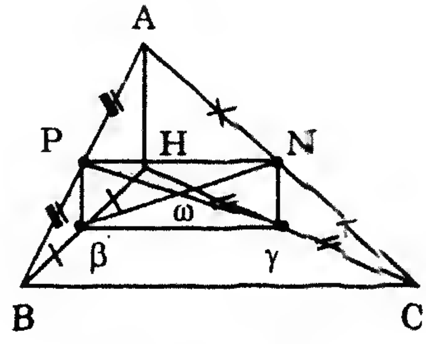


Hình 67a

Gọi ω là giao điểm của hai đường chéo βN và γP

4 điểm β, γ, N, P cùng nằm trên đường tròn (ω) nhận βN và γP làm đường kính.

Chứng minh tương tự, các tứ giác $\gamma\alpha PM$, $\alpha\beta MN$ đều là hình chữ nhật nội tiếp đường tròn (ω) có các đường kính là βN, γP và αM (Hình 67a và 67b).



Hình 67b

Tam giác $A'M\alpha$ vuông tại A' nên A' nằm trên đường tròn đường kính αM, tức đường tròn (ω).

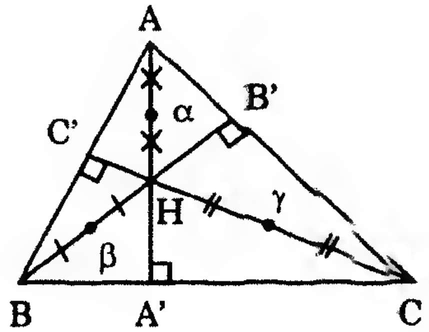
Tương tự, ta có: $B', C' \in (\omega)$.

Do đó 9 điểm đã cho cùng nằm trên đường tròn (ω).

* Ta lại có: $\overrightarrow{H\alpha} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HA}$

$\overrightarrow{H\beta} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HB}$

$\overrightarrow{H\gamma} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HC}$



Hình 68

Điều này chứng tỏ rằng các điểm α, β, γ cùng nằm trên một đường tròn là ảnh của đường tròn (O) cho bởi phép vị tự $H(H; \frac{1}{2})$ tâm H, tỉ số vị tự $k = \frac{1}{2}$.

Do đó: (ω) là ảnh của (O) cho bởi $H(H; \frac{1}{2})$.

Tâm ω là ảnh của O trong phép vị tự $H(H; \frac{1}{2})$.

$$H\omega = \frac{1}{2}HO$$

Suy ra ω là trung điểm của HO. Bán kính của (ω) là:

$$\rho = \frac{1}{2}R. \text{ (Hình 68).}$$

Vậy: 9 điểm A', B', C', M, N, P, α, β, γ cùng nằm trên đường tròn (ω; $\frac{R}{2}$)

Đường tròn (ω) được gọi là đường tròn 9 điểm hay đường tròn Euler.

40. Cho tam giác BAC trọng tâm G nội tiếp trong đường tròn (O) tâm O, bán kính R, BC cố định, A di động, I là trung điểm của cạnh BC.

1. Tìm tập hợp điểm M, đối xứng của G qua I, khi A di động.

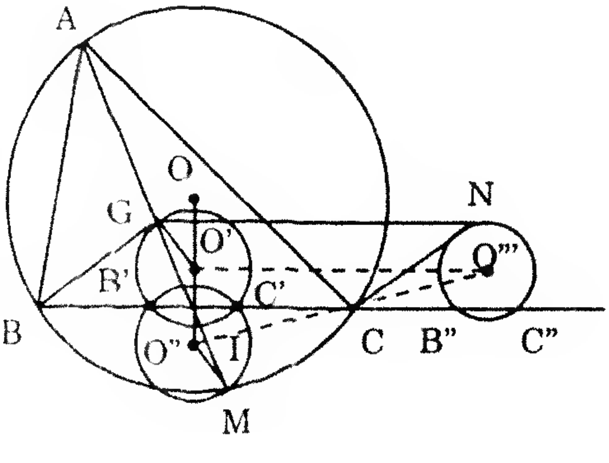
2. Dựng hình bình hành CBGN. Tìm tập hợp điểm N khi A di động.

Hướng dẫn: Tìm tập hợp các điểm G.

Giải

Ta có BC cố định nên I cố định

1. *Cách 1:* Chúng ta đã biết G là ảnh của điểm A trong phép vị tự H(I; $\frac{1}{3}$). Do đó khi A chạy trên đường tròn (O; R), A ≠ B, C thì tập hợp các điểm G là đường tròn (O; $\frac{R}{3}$) ngoại trừ hai điểm B' và C'. Đường tròn (O'; $\frac{R}{3}$) là



Hình 69

ảnh của đường tròn (O; R) đã cho trong phép vị tự H(I; $\frac{1}{3}$); các điểm O', B', C' theo thứ tự là ảnh của các điểm O, B, C trong phép vị tự đó), lưu ý là O' ∈ OI.

M là điểm đối xứng của điểm G qua I nên tập hợp các điểm M là đường tròn (O"; $\frac{R}{3}$), ảnh của đường tròn (O'; $\frac{R}{3}$) trong phép

đối xứng tâm S(I), không kể hai điểm B' và C' (Hình 69).

* *Cách 2:*

Ta có: $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$; $\overrightarrow{IM} = -\overrightarrow{IG} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$.

Ta suy ra M là ảnh của A trong phép vị tự nghịch (phép vị tự âm) $H(I; -\frac{1}{3})$.

Do đó ta có tập hợp các điểm M là đường tròn (O"; $\frac{R}{3}$), ảnh của đường tròn (O; R) cho bởi phép vị tự $H(I; -\frac{1}{3})$ không kể hai điểm B' và C'. (Lưu ý rằng B' và C' theo thứ tự là ảnh của C và B trong phép vị tự trên).

2. *Cách 1:*

CBGN là một hình bình hành nên ta có: $\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{BC}$.

Ta suy ra N là ảnh của G trong phép tịnh tiến $T(\overrightarrow{BC})$.

Do đó ta có tập hợp các điểm N là đường tròn (O"; $\frac{R}{3}$), ảnh của đường tròn (O'; $\frac{R}{3}$) cho bởi phép tịnh tiến $T(\overrightarrow{BC})$, không kể hai điểm B", C" (B" và C" theo thứ tự là ảnh của B và C trong phép tịnh tiến $T(\overrightarrow{BC})$).

* *Cách 2:* Theo cách dựng, ta có CMBG là một hình bình hành

$$\Rightarrow \overrightarrow{BG} = -\overrightarrow{CM}.$$

CBGN là hình bình hành nên ta có: $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{CN}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{CM}.$$

Do đó N là ảnh của điểm M trong phép đối xứng S(I) ⇒ đpcm..

41. Cho đường tròn (O) tâm O, bán kính R, tiếp xúc với đường thẳng D tại điểm C ∈ D; AB là đường kính của (O), song song với D. Gọi (M) là đường tròn tâm M di động, tiếp xúc với đường kính AB ở I và tiếp xúc với nửa đường tròn ACB tại J.

1. Chứng tỏ IJ đi qua một điểm cố định.
2. Hãy dựng đường tròn (M) khi biết một trong hai điểm I, J.

Hướng dẫn

Nhận xét rằng 3 điểm J, M, O thẳng hàng và MI ⊥ AB.

Giải

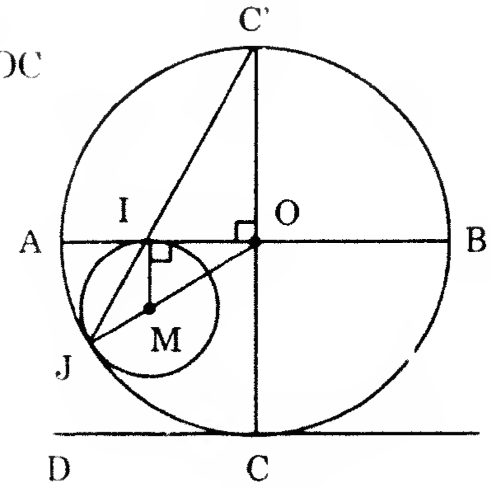
1. Hai đường tròn (M) và (O) tiếp xúc với nhau tại J nên 3 điểm J, M, O thẳng hàng (Hình 70).

Ta có : $\left.\begin{array}{l} AB \,//\, D \\ MI \perp AB \text{ (Vì sao?)} \\ OC \perp D \end{array}\right\} \Rightarrow MI \,//\, OC$

Gọi C' là điểm đối tâm của C trong đường tròn (O) ta có:

$$MI \,//\, OC'.$$

Hai đường tròn (M) và (O) tiếp xúc trong với nhau tại J nên J là tâm vị tự thuận của phép vị tự H(J; k) biến đường tròn (M) thành đường tròn (O).



Hình 70

$\overrightarrow{OC'}$ là ảnh của $\overrightarrow{MI}$ trong phép vị tự trên, vì I ∈ (M), C' ∈ (O) nên ta có J, I, C' thẳng hàng.

Vậy: IJ đi qua điểm cố định C'.

2. Giả sử ta đã biết điểm I.

C'I cắt đường tròn (O) tại J. Nối JO.

Dựng đường thẳng vuông góc với AB tại I, cắt JO tại M. Đường tròn (M) tâm M bán kính MJ là đường tròn phải dựng.

Học sinh tự chứng minh.

* Trường hợp điểm đã biết là điểm J.

Học sinh tự giải.

42. Trong mặt phẳng (Oxy), cho A(–a; 0) và B(a; 0), a > 0. Gọi M là một điểm di động trên đường tròn (O), đường kính AB; S là điểm đối xứng của A qua M.

1. Tìm tập hợp điểm S.
2. Tìm tập hợp tâm P đường tròn ngoại tiếp ΔSAB.
3. Tìm tập hợp trọng tâm G của ΔSAB.
4. Tìm tập hợp trung điểm I của SB.

Hướng dẫn

1. S là điểm đối xứng của điểm A qua M, ta suy ra được điều gì?
2. P là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSAB. Từ đó ta suy ra tập hợp các điểm P.
3. Chú ý đến tính chất của trọng tâm trong tam giác.

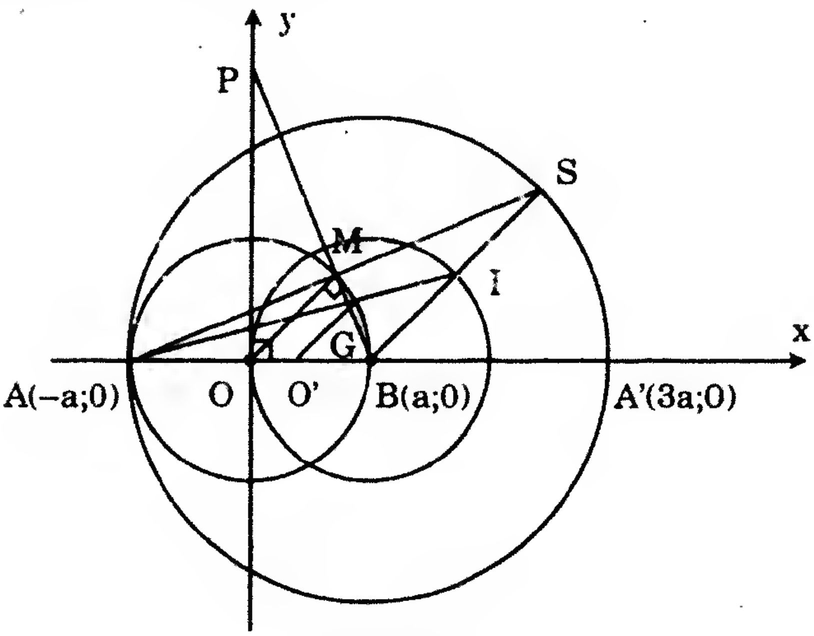
Giải

1. S là điểm đối xứng của điểm A qua M nên M là trung điểm của đoạn AS.

   Suy ra: $\overrightarrow{AS} = 2\overrightarrow{AM}$.

   Như vậy S là ảnh của điểm M trong phép vị tự H(A; 2) tâm A, tỉ số k = 2.

   Mặt khác, ta có: $O \xrightarrow{H(A;2)} B$.



Hình 71

   Do đó khi M chạy trên đường tròn (O) tâm O, bán kính R = a thì tập hợp các điểm S là đường tròn (B; 2a), ảnh của đường tròn (O; a) cho bởi phép vị tự H(A; 2).

   Nhận xét rằng đường tròn (B; 2a) đi qua A.

2. P là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSAB nên P là giao điểm của các đường trung trực của ΔSAB.

   A(−a; 0) và B(a; 0) đối xứng qua O nên trung trực của AB là trục tung.

   $M \in (O) \Leftrightarrow \widehat{AMB} = 90^0$.

   Suy ra BM là trung trực của AS.

   P là giao điểm của BM và trục tung.

   Khi M tiến tới A trên đường tròn (O; a) thì S tiến tới A trên đường tròn (B; 2a), P tiến tới điểm O

   Khi M tiến tới B thì S tiến tới điểm A', đối xứng của A qua B, BM tiến tới vị trí tiếp tuyến của đường tròn (O; a) nghĩa là

song song với trục tung. Lúc đó, điểm P chạy ra xa vô cực trên trục tung.

Do đó tập hợp các điểm P chính là trục tung, ngoại trừ điểm gốc O của hệ trục tọa độ.

3. Ta có: $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.

Ta suy ra G là ảnh của M trong phép vị tự $H(B; \frac{2}{3})$ tâm B, tỉ số $k = \frac{2}{3}$.

Do đó khi M chạy trên đường tròn (O; a) thì tập hợp các điểm G là đường tròn $(O; \frac{2}{3}a)$, ảnh của đường tròn (O; a) cho bởi phép vị tự $H(B; \frac{2}{3})$ với O' là ảnh của O trong phép vị tự trên.

4. I là trung điểm của SB. Ta có: $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BS}$ (Hình 71).

I là ảnh của S trong phép vị tự $H(B; \frac{1}{2})$.

Khi M chạy trên đường tròn (O; a) thì S chạy trên đường tròn (B; 2a). Do đó tập hợp các điểm I là đường tròn (B; a), ảnh của đường tròn (B; 2a) cho bởi phép vị tự $H(B; \frac{1}{2})$.

* *Cách khác:* Ta cũng có: $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.

I là ảnh của G trong phép vị tự $H(A; \frac{3}{2})$.

Suy ra tập hợp các điểm I.

43. Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') cắt nhau tại A và B, O' nằm ngoài (O).

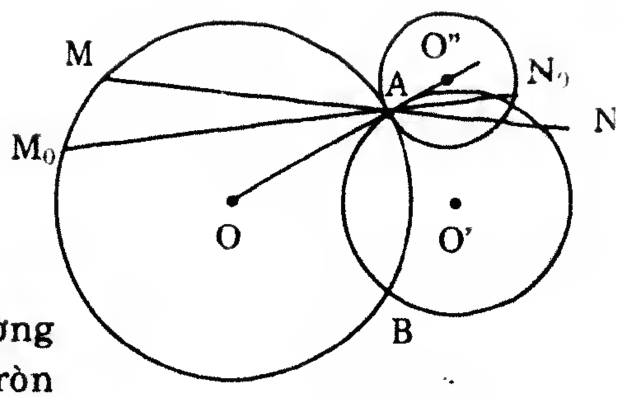
Hãy dựng một cát tuyến đi qua A cắt (O) tại M và (O') tại N sao cho $AN = \frac{1}{2}AM$.

Giải

Giả sử ta đã dựng được một cát tuyến Δ đi qua A và cắt hai đường tròn (O; R), (O'; R') theo thứ tự tại M và N sao cho:

$$AN = \frac{1}{2}AM \Rightarrow \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}.$$

Ta suy ra N là ảnh của điểm M trong phép vị tự $H(A; -\frac{1}{2})$ tâm A, tỉ số vị tự $k = -\frac{1}{2}$.



Hình 72

Do đó N là giao điểm của đường tròn (O'; R') và đường tròn (O"; R"). ảnh của đường tròn (O; R) cho bởi phép vị tự $H(A; -\frac{1}{2})$, với O" là ảnh của O trong phép vị tự $H(A; -\frac{1}{2})$.

$$\overrightarrow{AO'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AO} \text{ và } R" = \frac{1}{2}R.$$

Nhận xét rằng đường tròn (O") đi qua A.

Điều kiện: $O'O" < \frac{R}{2} + R'$.

44. Cho hình bình hành ABCD, tam giác ABD nội tiếp trong đường tròn (O) tâm O bán kính R, A cố định, B và D di động sao cho BD = 2a, a là một độ dài đã biết.

1. Chứng minh rằng trực tâm H của ΔBCD cố định.
2. Tìm tập hợp trực tâm H' của ΔABD.
3. Tìm tập hợp đỉnh C của hình bình hành ABCD.

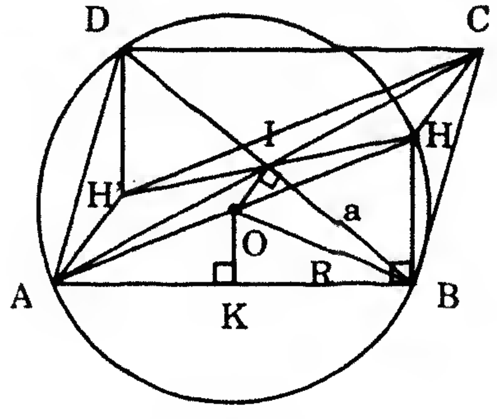
Giải

1. Gọi I là tâm của hình bình hành ABCD. Các tam giác BCD và DAB đối xứng qua I. Do đó H và H' đối xứng nhau qua I

$\Rightarrow$ BH = DH' và BH // DH'

$\Rightarrow \overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{KO}$, K là trung điểm AB suy ra H là điểm đối tâm của A trong đường tròn (O; R).

Vậy: H cố định.



Hình 73

2. Ta có:

- $OI \perp BD$

$\Rightarrow OI = \sqrt{OB^2 - IB^2} = \sqrt{R^2 - a^2}$.

Suy ra I nằm trên đường tròn (α) tâm O, bán kính $\rho = \sqrt{R^2 - a^2}$.

- $\overrightarrow{HH'} = 2\overrightarrow{HI}$.

Suy ra H' là ảnh của I trong phép vị tự H(H; 2) tâm H tỉ số vị tự k = 2.

Do đó tập hợp các điểm H' là đường tròn (β), ảnh của đường tròn (α) cho bởi phép vị tự H(H; 2).

Ta lại có: $\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{HO}$.

Ta suy ra (β) là đường tròn tâm A bán kính $r = 2\rho = 2\sqrt{R^2 - a^2}$.

3. Ta có H và H', C và A đối xứng qua I.

Suy ra: $\overrightarrow{H'C} = \overrightarrow{AH}$ (Hình 73).

C là ảnh của H' trong phép tịnh tiến T($\overrightarrow{AH}$).

Do đó khi H' vạch đường tròn (β), tâm A, bán kính $r = 2\sqrt{R^2 - a^2}$; C vạch đường tròn (γ) tâm H bán kính r, ảnh của (β) cho bởi phép tịnh tiến T($\overrightarrow{AH}$).

Vậy: Tập hợp các điểm C là đường tròn (γ) tâm H, bán kính $r = 2\sqrt{R^2 - a^2}$.

Điều kiện: a < R.

45. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O; R).

M là một điểm di động trên cung BC, I là trung điểm của dây AM

Tìm tập hợp (E) các điểm I.

Giải

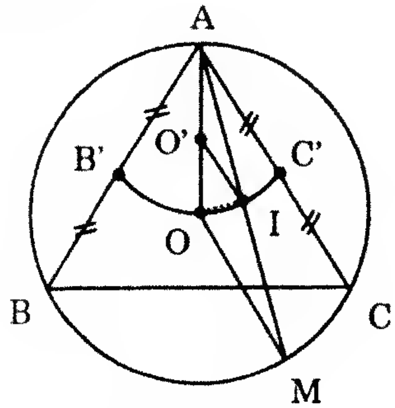
Gọi O' là trung điểm của bán kính AO (Hình 74).

Ta có: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{AO'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AO}$

$\Rightarrow \overrightarrow{O'I} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OM}$.

I là ảnh của M trong phép vị tự H(A; $\frac{1}{2}$). Do đó khi M chạy trên



Hình 74

cung BC có số đo 120^0 thì tập hợp (E) các điểm I là ảnh của cung BC cho bởi phép vị tự H(A; $\frac{1}{2}$), là cung B'C' có số đo 120^0, nằm trên đường tròn (O'; $\frac{R}{2}$) với B', C', O' theo thứ tự là trung điểm của AB, AC, AO.

*** 46.** Trong mặt phẳng (Oxy), cho hai điểm A(–1; 1) và B(–1; –1); (O) là đường tròn tâm O đi qua A và B.

Cho M là một điểm di động trên đường tròn (O), không trùng với A,B, được xác định bởi:

$$(\overrightarrow{Ox};\overrightarrow{OM}) = \alpha + k2\pi,\ k \in Z.$$

MA và MB cắt Ox theo thứ tự tại P và Q. Giả sử ta có:

$$\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{MA}.$$

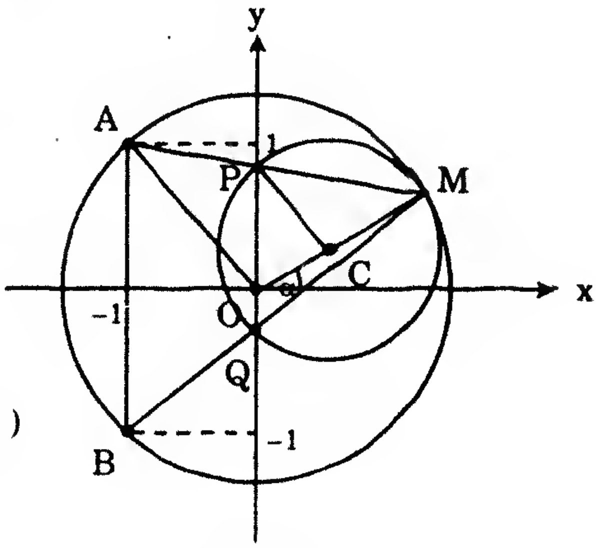
1. Viết phương trình của đường tròn (O).
2. Chứng minh rằng
$$k = \frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{1 + \sqrt{2}\cos\alpha}$$
3. Chứng tỏ rằng đường tròn (C) ngoại tiếp ΔMPQ tiếp xúc với đường tròn (O) tại M.
4. So sánh hai vectơ $\overrightarrow{OC}$ và $\overrightarrow{OM}$, C là tâm của đường tròn (C).

Giải

1. Đường tròn (O) tâm O đi qua hai điểm A(–1; 1) và B(–1; –1) nên (O) có bán kính $R = \sqrt{2}$.

Ta suy ra phương trình của đường tròn (O) là:

$$x^2 + y^2 = 2.$$



Hình 75

2. Tọa độ của điểm M ($OM = \sqrt{2}$)

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\alpha \\ y = \sqrt{2}\sin\alpha \end{cases}$$

Theo giả thiết, ta có:

$$\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{MA}$$

$$\Rightarrow x_P - x_M = k(x_A - x_M)$$

$\Rightarrow k = \dfrac{x_M}{x_M - x_A} = \dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha + 1}$

Vậy: $k = \dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha + 1}$

3. Ta có: PQ // AB

Suy ra: $\vec{MP} = k\vec{MA}$

$\vec{MQ} = k\vec{MB}$.

Do đó: PQ là ảnh của AB trong phép vị tự H(M, k) tâm M tỉ số vị tự k (Hình 75).

Phép vị tự H(M; k) biến đường tròn (O) thành đường tròn (C) mà tâm vị tự M là điểm chung của hai đường tròn (O) và (C) nên (O) và (C) tiếp xúc nhau tại M.

Vậy: (C) tiếp xúc với (O) tại M.

4. (C) là ảnh của (O) trong phép vị tự H(M; k) nên tâm C của (C) là ảnh của O trong phép vị tự đó.

Ta có: $\vec{MC} = k\vec{MO}$

$\Leftrightarrow \vec{OC} - \vec{OM} = k\vec{MO}$

$\Leftrightarrow \vec{OC} = \vec{OM} + k\vec{MO}$

$\Leftrightarrow \vec{OC} = (1 - k)\vec{OM}$

Vậy: $\vec{OC} = (1 - k)\vec{OM}$.

***47.** Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường tròn (C) tâm I bán kính R tiếp xúc với Oy tại O, AB là một đường kính của (C), song song với Oy, ($x_A > 0$); (α) là đường tròn tâm J lưu động tiếp xúc với AB ở điểm E và tiếp xúc với nửa đường tròn AOB tại F.

1. Chứng tỏ FE luôn đi qua một điểm cố định.
2. Tìm tập hợp (P) các điểm J. Có nhận xét gì?
3. Viết phương trình của (C) và của (β).

Giải

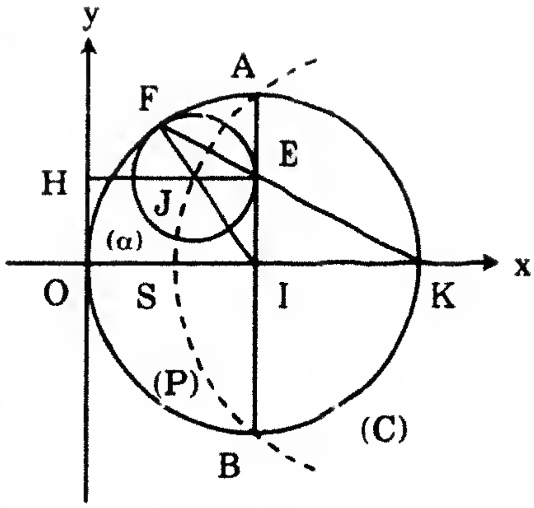
1. Hai đường tròn (α) và (C) tiếp xúc trong với nhau tại điểm F nên F là tâm của phép vị tự thuận (phép vị tự dương) biến đường tròn (C) tâm I(R; 0) bán kính R thành đường tròn (α) tâm J.

Suy ra: F, I, J thẳng hàng.

Các vectơ bán kính $\overline{IK}$ và $\overline{JE}$ cùng hướng, K là giao điểm của (C) và Ox, k ≠ O, nên là hai vectơ đối ứng trong phép vị tự trên.

Suy ra: F, E, K thẳng hàng

Vậy: FE luôn luôn đi qua điểm cố định K.



Hình 76

2. Ta có: JE // Ox ⇒ JE ⊥ Oy tại H
   - JH = EH − EJ = R − FJ = JI

   Suy ra J nằm trên parabol có tiêu điểm I, đường chuẩn là trục tung Oy.

   Giới hạn: J nằm trong nửa đường tròn (AOB) giới hạn bởi hai điểm A và B.

   Vậy: Tập hợp (P) các điểm J là cung parabol ASB, đỉnh S là trung điểm của OI.

3. Đường tròn (C) có tâm I(R; 0) bán kính R nên phương trình của (C) là:

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2Rx = 0.$$

   - Gọi (x; y) là tọa độ của J.

   Ta có: $JI = JH \Rightarrow JI^2 = JH^2$

   $\Leftrightarrow (R - x)^2 + y^2 = x^2 \Rightarrow y^2 = 2Rx - R^2$

   với $x \geq \frac{R}{2}$, $|y| \leq R$.

   Vậy: Phương trình của (P) là: $y^2 = 2Rx - R^2$.

***48.** Trong mặt phẳng (Oxy), lấy hai điểm A(−a; 0) và B(a; 0) với a > 0. M là một điểm di động trên đường tròn (0; a); A' là điểm đối xứng của A qua M.

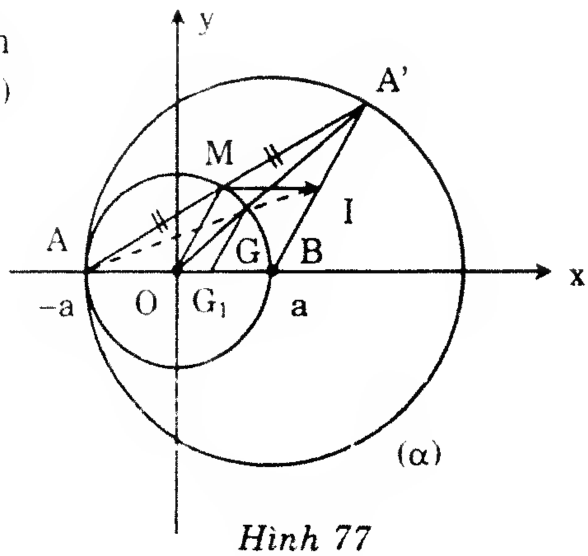
1. Tìm tập hợp (α) các điểm A' bằng hai cách.
   + Hình học lí thuyết.
   + Hình học giải thích.
2. Tìm tập hợp (β) của trọng tâm G của tam giác ABA' bằng hai cách.
3. Gọi I là trung điểm của A'B. Tìm tập hợp (γ) các điểm I bằng hai cách.

Giải

1. A' là điểm đối xứng của A qua M nên ta có:

$$\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AM}.$$

Như vậy: A' là ảnh của M cho bởi phép vị tự H(A; 2) tâm A tỉ số vi tự k = 2.



Hình 77

Ta suy ra tập hợp (α) các điểm A' là ảnh của đường tròn (O; a) cho bởi phép vị tự H(A; 2).

Ta lại có: $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AO}$

nên đường tròn (α) có tâm là điểm B bán kính R = 2a, tiếp xúc với (O) tại B.

+ Ta có: $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AM}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{A'} - x_A = 2(x_M - x_A) \\ y_{A'} - y_A = 2(y_M - y_A) \end{cases}$$

Ta có: A(–a; 0), M(x; y), A'(x'; y')

$$\Rightarrow \begin{cases} x' + a = 2(x + a) \\ y' - 0 = 2(y - 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x' - a}{2} \\ y = \dfrac{y'}{2} \end{cases}$$

Ta có phương trình đường tròn (O):

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x' - a}{2}\right)^2 + \left(\frac{y'}{2}\right)^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow (x' - a)^2 + y'^2 = 4a^2 \quad (*)$$

(*) là đường tròn tâm B(a; 0) có bán kính R = 2a (Hình 77).

2. Cách 1.

Ta có: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA'}$.

Suy ra G là ảnh của A' trong phép vị tự H(O; $\frac{1}{3}$) tâm O tỉ số k = $\frac{1}{3}$.

Kẻ G_1G // BA'. Ta có: $\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$.

Do đó tập hợp (β) các điểm G là đường tròn tâm $G_1(\frac{a}{3}; 0)$ bán kính $R' = \frac{2}{3}a$, ảnh của đường tròn (α) cho bởi phép vị tự $H(O; \frac{1}{3})$.

** Cách 2:*

Ta có: $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.

Suy ra G là ảnh của M trong phép vị tự $H'(B; \frac{2}{3})$.

Do đó tập hợp (β) các điểm G là ảnh của đường tròn (O; a) cho bởi phép vị tự $H'(B; \frac{2}{3})$, là đường tròn $(G_1; \frac{2}{3}a)$.

3.** Cách 1:*

I là trung điểm của BA' nên ta có: $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA'}$.

Suy ra tập hợp (γ) các điểm I là ảnh của đường tròn (α) cho bởi phép vị tự $H''(B; \frac{1}{2})$, là đường tròn có tâm B(a; 0) bán kính R' = a.

** Cách 2:*

Ta có: $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$.

Ta suy ra I là ảnh của M trong phép tịnh tiến $T(\overrightarrow{OB})$.

Do đó tập hợp (γ) các điểm I là ảnh của đường tròn (O; a) cho bởi phép tịnh tiến $T(\overrightarrow{OB})$, tâm B, bán kính R = a.

Chương IV. PHÉP QUAY

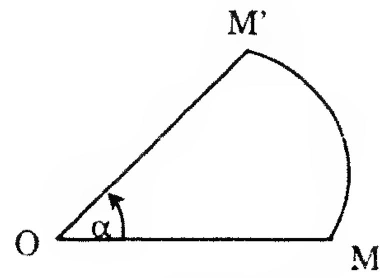
KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Trong mặt phẳng, cho một điểm cố định O và một điểm M, α là một góc định hướng không đổi cho trước.

Điểm M' được gọi là ảnh của điểm M trong phép quay $R(O; \alpha)$ tâm O, góc quay α khi

$$\begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha \end{cases}$$



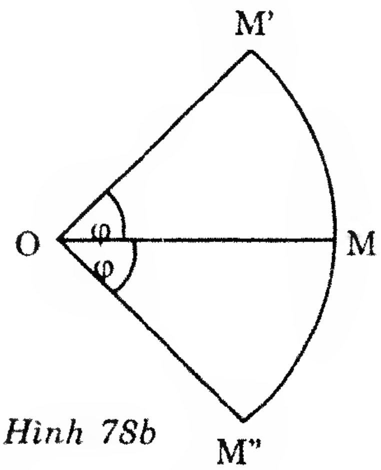
Hình 78c

Ta có: $M \xrightarrow{R(O,\alpha)} M' : \begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha \end{cases}$

- Ngược lại: M là ảnh của M' cho bởi phép quay $R(O; -\alpha)$

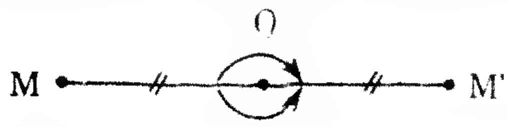
  $M' \xrightarrow{R(O,-\alpha)} M$

- $R(O; -\alpha) = -R(O; \alpha)$
- Chú ý rằng với góc α không định hướng thì phép quay tâm O, góc quay α sẽ biến điểm M thành hai điểm M' và M''.



Hình 78b

- Trong phép quay $R(O; \alpha)$, O là điểm kép
- Phép quay $R(0; \pm 180^0)$ là một phép đối xứng S(O).



* *Ảnh của một hình:*

Khi điểm M vẽ một hình (F) thì ảnh M' của M cho bởi phép quay $R(O; \alpha)$ sẽ vẽ một hình (F') gọi là ảnh (hay biến hình) của hình (F) cho bởi phép quay $R(O; \alpha)$.

Do đó: Ảnh (biến hình) của một hình (F) cho bởi phép quay $R(O; \alpha)$ là một hình (F') gồm tất cả các điểm ảnh của tất cả các điểm của hình (F) cho bởi phép quay $R(O; \alpha)$.

$$(F') = \{M' \mid M \xrightarrow{R(O,\alpha)} M', M \in (F)\}.$$

2. *Tính chất*

Phép quay là một phép dời hình, biến hình (F) thành hình (F') bằng hình (F).

3. *Định lí:*

a) Ảnh của đoạn AB là A'B' = AB

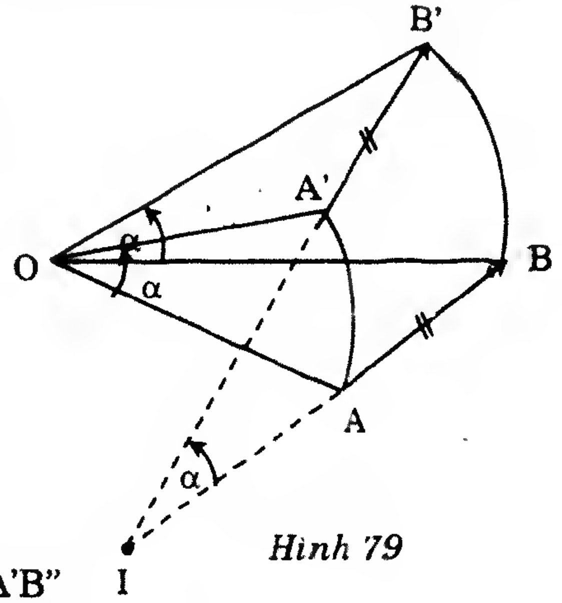
b) Góc của hai vectơ đối ứng bằng góc quay

$$A \xrightarrow{R(O;\alpha)} A'$$

$$B \xrightarrow{R(O;\alpha)} B'$$

$$\overrightarrow{AB} \xrightarrow{R(O;\alpha)} \overrightarrow{A'B'}$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'}) = \alpha$$



Hình 79

c) Gọi I là giao điểm của AB và A'B"

Các tứ giác OIAA', OIBB' nội tiếp

4. Xác định phép quay R(O; α) biến $\overrightarrow{AB}$ thành $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'B'}$ là hai vectơ có cùng chiều dài cho trước (Hình 79).

- Góc quay $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$
- Ta có: $\begin{cases} OA = OA' \\ (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OA'}) = \alpha + k2\pi \end{cases}$ $\begin{cases} OB = OB' \\ (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OB'}) = \alpha + k2\pi \end{cases}$

với $k \in Z$

Tâm quay O được xác định như sau:

+ O là giao điểm của các trung trực của các đoạn thẳng AA', BB'.

+ O là giao điểm thứ hai của hai đường tròn IAA' và IBB', I là giao điểm của AB và A'B'.

+ O là giao điểm của trung trực của đoạn AA' và đường tròn IBB'.

5. *Tích của hai phép quay*

a) Tích hai phép quay đồng tâm

$$R(O; \alpha).R(O; \alpha') = ?$$

Ta có: $M \xrightarrow{R(O;\alpha)} M'$ $\begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) = \alpha \end{cases}$

$M' \longrightarrow M''$ $\begin{cases} OM' = OM'' \\ (\overrightarrow{OM'}; \overrightarrow{OM''}) = \alpha \end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases} OM = OM'' \\ (\vec{OM}; \vec{OM''}) = \alpha + \alpha' \end{cases} \Rightarrow M \xrightarrow{R(O;\alpha+\alpha')} M''.$

Do đó: Tích của hai phép quay đồng tâm là một phép quay đồng tâm mà góc quay bằng tổng các góc quay

$$R(O; \alpha).R(O; \alpha') = R(O; \alpha + \alpha').$$

Nếu $\alpha + \alpha' = 0$ thì tích của hai phép quay là một phép đồng nhất.

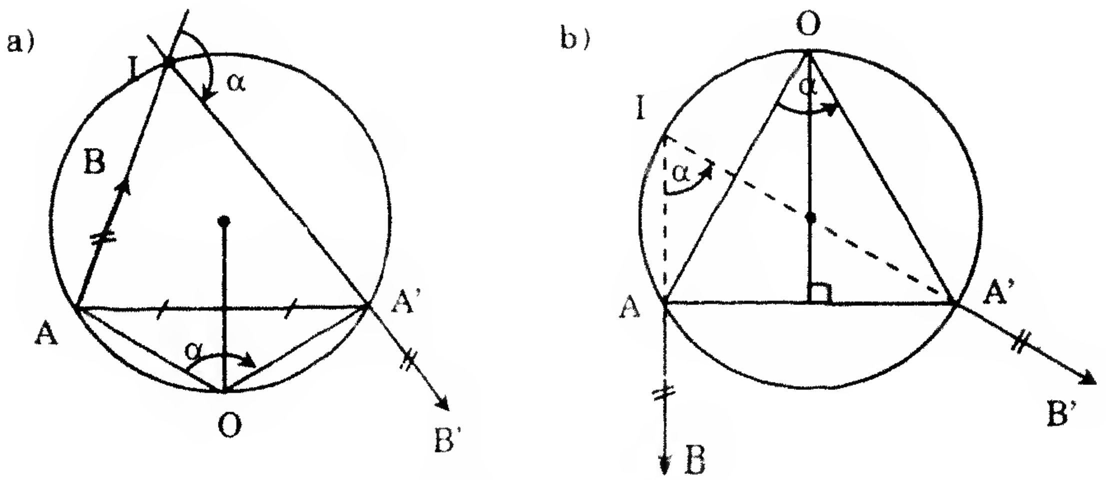
b) Tích của hai phép quay khác tâm (Hình 80a, b)

$$R(O; \alpha).R(O'; \alpha') = ?$$

Ta có: $\vec{AB} \xrightarrow{R(O,\alpha)} \vec{A'B'}$ $\begin{cases} AB = A'B' \\ (\vec{AB}; \vec{A'B'}) = \alpha \end{cases}$

$\vec{A'B'} \xrightarrow{R(O',\alpha')} \vec{A''B''}$ $\begin{cases} A'B' = A''B'' \\ (\vec{A'B'}; \vec{A''B''}) = \alpha \end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases} AB = A''B'' \\ (\vec{AB}; \vec{A''B''}) = \alpha + \alpha' \end{cases}$ $M \xrightarrow{R(\alpha+\alpha')} M''.$



Hình 80

*c) **Điểm kép của tích hai phép quay***

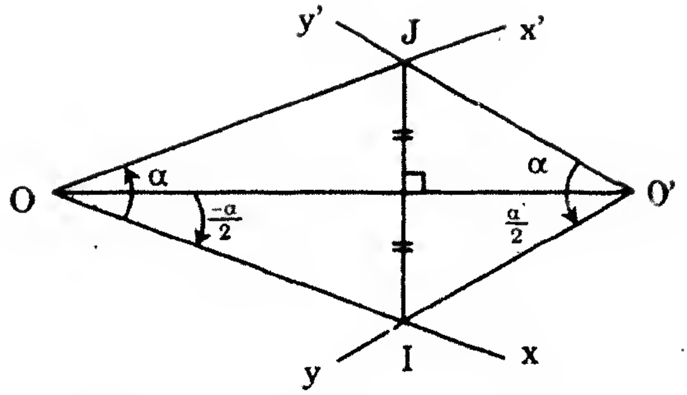
Giả sử I là điểm kép trong tích của hai phép quay $R(O; \alpha).R(O'; \alpha')$.

$$I \xrightarrow{R(O,\alpha).R(O',\alpha')} I.$$

Gọi J là ảnh của I cho bởi phép quay $R(0; \alpha)$ thì I là ảnh của J cho bởi phép quay $R(O', \alpha')$.

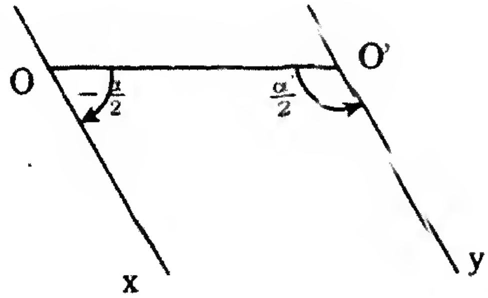
$$I \xrightarrow{R(O,\alpha)} J \xrightarrow{R(O',\alpha')} I$$

O và O' đều nằm trên trung trực của IJ (Hình 80).



Hình 81

Cho OO' quay quanh O một góc $-\frac{\alpha}{2}$, OO' đến trùng với tia Ox, cho O'O quay quanh O' một góc $\frac{\alpha'}{2}$, O'O đến trùng với tia O'y; Ox và O'y giao nhau tại I. Đó là điểm kép trong tích của hai phép quay.



Hình 82

– Nếu $\alpha + \alpha' \neq k2\pi$, $k \in Z$

$$R(O;\ \alpha).R(O';\ \alpha'') = R(I,\ \alpha + \alpha')$$

– Nếu $\alpha + \alpha' = k2\pi \Rightarrow$ Ox, O'y song song

Tích của hai phép quay là một phép tịnh tiến (Hình 82)

6. Tích của một phép quay và một phép tịnh tiến

$$R(O;\ \alpha).T(\overrightarrow{V}) = ?$$

– Phép quay R(O; α) biến $\overrightarrow{AB}$ thành $\overrightarrow{A'B'}$:

$$\begin{cases} AB = A'B' \\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right) = \alpha\ [2\pi) \end{cases}$$

– Phép tịnh tiến $T(\overrightarrow{V})$ biến $\overrightarrow{A'B'}$ thành $\overrightarrow{A''B''} = \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} \xrightarrow{R(O;\alpha)} \overrightarrow{A'B'} \xrightarrow{T(\overrightarrow{V})} \overrightarrow{A''B''}$$

$$R(O;\ \alpha).T(\overrightarrow{V})$$

Ta suy ra: $\begin{cases} AB = A''B'' \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A''B''}) = \alpha\ [2\pi] \end{cases}$

Điều này chứng tỏ: Tích của một phép quay và một phép tịnh tiến là một phép quay.

• Tích của một phép tịnh tiến và một phép quay thì sao? Các em học sinh thử nghiên cứu xem?

LUYỆN TẬP

49. Chứng minh rằng phép quay R(O; θ) có thể xem là tích số của hai phép đối xứng trục.

Hướng dẫn

Gọi M' là ảnh của điểm M cho bởi phép quay R(O; θ).

Kẻ tia phân giác Oz của góc MOM' và các tia phân giác Ox, Oy của các góc $\widehat{MOz}$, $\widehat{zOM'}$.

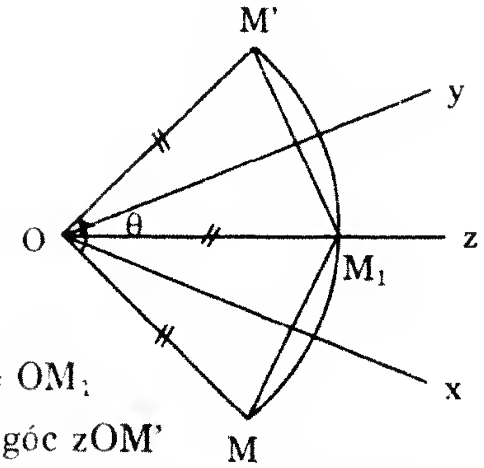
Gọi M_1 là ảnh của M trong phép đối xứng trục Ox rồi chứng minh M' là ảnh của điểm M_1 cho bởi phép đối xứng trục Oy.

Giải

Gọi M' là ảnh của điểm M trong phép quay R(O; θ)

Dựng tia phân giác Oz của góc $\widehat{MOM'}$ và các tia phân giác Ox, Oy của các góc $\widehat{MOz}$, $\widehat{zOM'}$.

Gọi M_1 là ảnh của điểm M trong phép đối xứng S(Ox), dĩ nhiên $M_1 \in Oz$



Hình 83

Ta có: $OM_1 = OM$, $OM = OM' \Rightarrow OM' = OM_1$

Tia phân giác Oy là trục đối xứng của góc zOM'

Ta có: $OM' = OM$

$M_1 \in Oz$

Suy ra M' là ảnh của M_1 trong phép đối xứng S(Oy).

Do đó phép quay R(O; θ) là tích của hai phép đối xứng trục S(Ox) và S(Oy).

50. Trên đường tròn (O; R) lấy hai điểm A và B. Hãy tìm trên cung AB một điểm C sao cho CA + CB có độ dài không đổi a.

Giải

Giả sử ta đã tìm được trên cung AB một điểm C sao cho

$$CA + CB = a$$

a là một độ dài không đổi cho trước.

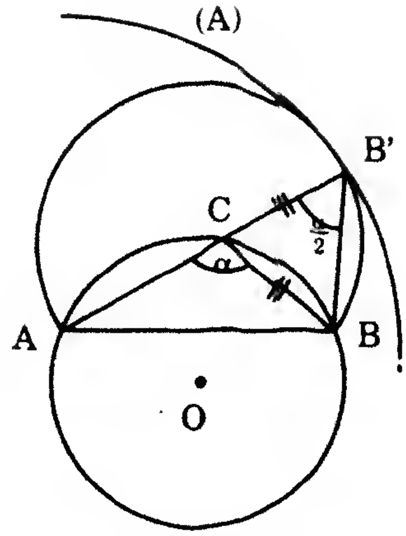
Phép quay R(C; $180^0 - \alpha$) với ($\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}$) = $\alpha + k360^0$, ($k \in Z$) biến điểm B thành điểm B' nằm trên tia đối của tia CA. (Hình 84).

$CB' = CB \Rightarrow AB' = a$; $(\overrightarrow{B'A}; \overrightarrow{B'B}) = \dfrac{\alpha}{2} + m360^0$.

Do đó B' là giao điểm của đường tròn (A; a) và cung chứa góc định hướng $\dfrac{\alpha}{2}$. Đường thẳng AB' cắt cung AB tại điểm thứ hai C, C là điểm phải dựng.

Phép đối xứng $S(\Delta)$, trục đối xứng Δ là trung trực của dây AB, biến điểm C thành điểm C' thỏa đề bài.

Vậy: Bài toán có hai nghiệm hình nếu $a \le 2R' = \dfrac{AB}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$, với R' là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABB'$.



Hình 84

51. Trên đường tròn (O), lấy một điểm cố định A và một điểm di động B Dựng tam giác đều ABC. Tìm tập hợp các điểm C.

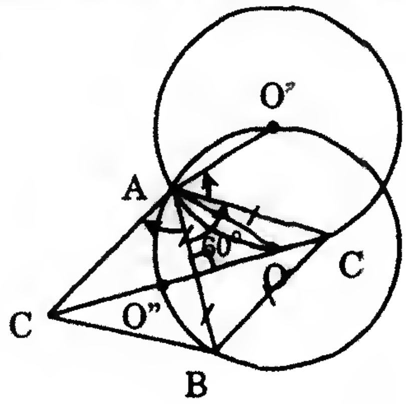
Giải

Giả sử $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) > 0 \Rightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 60^0 + k.360^0$, $k \in Z$.

Suy ra C là ảnh của B trong phép quay $R(A; 60^0)$ tâm A, có góc quay $\theta = 60^0$.

Do đó khi điểm M chạy trên đường tròn (O), ta có tập hợp các điểm C là đường tròn (O'), ảnh của đường tròn (O) cho bởi phép quay trên (Hình 85)

Nếu $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -60^0 + k.360^0$, $(k \in Z)$ thì tập hợp các điểm C là đường tròn (O") cho bởi phép quay $R(A; -60^0)$.



Hình 85

52. Cho tam giác đều ABC tâm O.

Hãy tìm ảnh của ΔABC trong phép quay $R(O; 120^0)$ tâm O, góc quay 120^0.

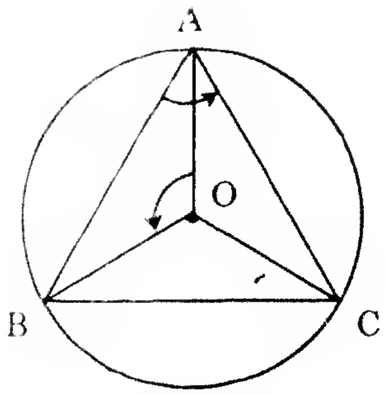
Giải

Giả sử ta có: $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 60^0$

$\Rightarrow (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OA}) = 120^0$.

Do đó ta có: Phép quay $R(O; 120^0)$ biến ΔABC thành ΔBCA

Nếu $(\vec{AB}; \vec{AC}) = -60^0$ thì ΔABC sẽ biến thành ΔCAB (Hình 86).



Hình 86

53. Một tam giác đều có đỉnh A cố định, đỉnh B chạy trên một hình (F)

Tìm tập hợp các đỉnh C khi:

1. (F) là một đường thẳng Δ không đi qua A.
2. (F) là một đường tròn (O; R) không đi qua A.

Giải

Xem tam giác đều ABC cạnh a.

Giả sử $(AB; AC) = 60^0 + k.180^0$, $k \in Z$.

Suy ra C là ảnh của B trong phép quay $R(A; 60^0)$.

1. Do đó khi B chạy trên một đường thẳng Δ không đi qua A thì tập hợp các điểm C là đường thẳng Δ' không đi qua A.

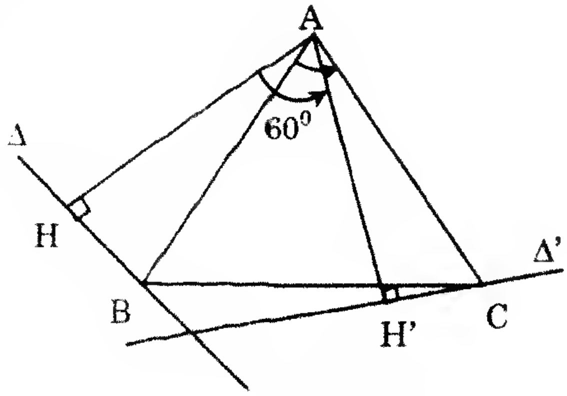
Cách dựng Δ':

Kẻ AH ⊥ Δ tại H.

Dựng H' là ảnh của H trong phép quay $R(A; 60^0)$.

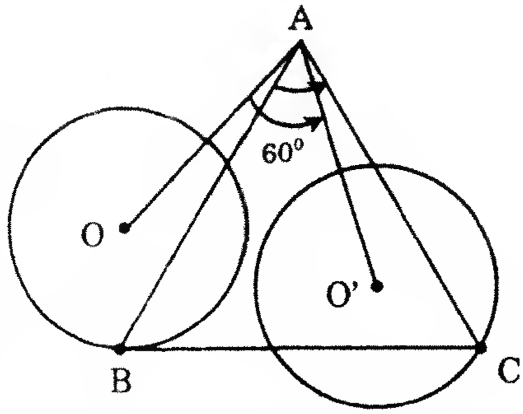
Dựng đường thẳng Δ' ⊥ AH' tại H' hoặc nối HC'; Δ' là ảnh của Δ cho bởi phép quay trên (Hình 87)

Δ' là tập hợp các điểm C phải tìm



Hình 87

2. Khi B chạy trên đường tròn (O; R) thì tập hợp các điểm C là đường tròn (O'; R) với O' là ảnh của O trong phép quay $R(A; 60^0)$ (Hình 88).



Hình 88

54. Cho hai đường thẳng (D) và (D') giao nhau.

1. Hãy xác định tập hợp (T) các tâm quay trong phép quay R biến đường thẳng (D) thành đường thẳng D'.
2. Cho A $\in$ (D) và A' $\in$ (D'). Hãy xác định tâm quay biến điểm A thành điểm A'.

Giải

1. Gọi C là tâm quay, I là giao điểm của D và D'.

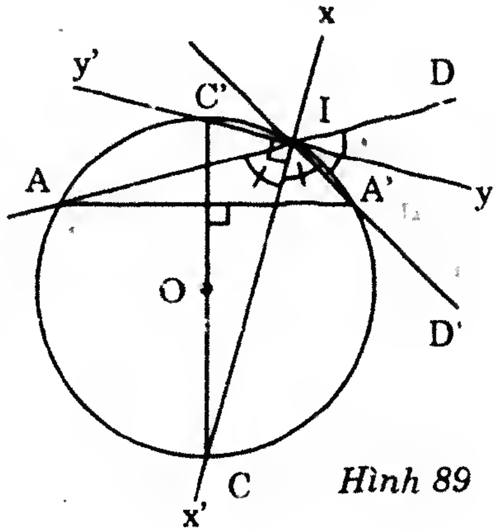
Dựng CH $\perp$ D và CH' $\perp$ D'.

$\Rightarrow$ H' là ảnh của H trong phép quay R(C; θ) với θ là một trong các góc hợp bởi D và D'

$\Rightarrow$ (D; IC) = (IC; D') + k.180^0, k $\in$ Z

Suy ra C nằm trên một đường phân giác của góc hợp bởi hai đường thẳng D, D'.

Đảo lại: Học sinh tự chứng minh.



Hình 89

2. Gọi C và C' là hai tâm quay biến D thành D', với C $\in$ x'Ix và C' $\in$ y'Iy, x'Ix và y'Iy là các phân giác của các góc hợp bởi D và D'.

A' là ảnh của A trong các phép quay trên, A $\in$ D và A' $\in$ D'.

Suy ra: C và C' nằm trên đường tròn (α) ngoại tiếp ΔIAA' (Hình 89)

Do đó C và C' là giao điểm thứ hai của x'Ix và y'Iy với đường tròn (α) hay C và C' là giao điểm của x'Ix và y'Iy với trung trực Δ của đoạn AA'.

55. Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R'); A là một điểm thuộc (O) và A' là một điểm thuộc (O').

1. Xác định tập hợp các tâm quay ω biến đường tròn (O) thành đường tròn (O').
2. Xác định tâm ω' biến điểm A thành điểm A'.

Hướng dẫn: Xem bài 54.

Học sinh tự giải.

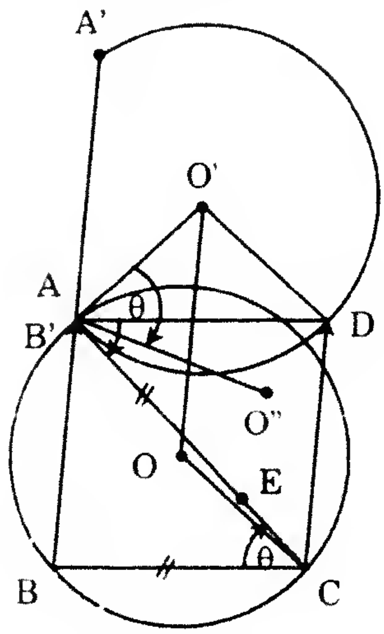
56. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R), A và B cố định, C di động trên cung lớn $\overset{\frown}{AB}$. Trên đường thẳng AC, lấy đoạn AE = BC và $\overrightarrow{AE}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AC}$.

Tìm tập hợp (E) các điểm D.

Hướng dẫn

Dựng hình bình hành ABCD. Có nhận xét gì về AD và AE?

Giải



Hình 90

Dựng hình bình hành ABCD.

Ta có: $\vec{CD} = \vec{BA} \Rightarrow C \xrightarrow{T(\vec{BA})} D$.

Ta suy ra: Khi C chạy trên cung lớn AB thì D chạy trên cung A'B', ảnh của cung AB cho bởi phép tịnh tiến $T(\vec{BA})$. (Hình 90).

Ta lại có:

- $\widehat{ACB} = \theta$ không đổi

  $\Rightarrow (AD; AE) = \theta + k180^0$ $(k \in Z)$.

- AE = AD (cùng bằng BC).

Như vậy: E là ảnh của D trong phép quay $R(A; \varphi)$ với $\varphi = \theta$ hoặc $\varphi = -\theta$.

Do đó khi D chạy trên cung lớn A'B' của đường tròn (O'; R) với O' là ảnh của O trong phép $T(\vec{BA})$ thì tập hợp (E) các điểm E là cung lớn A"B", ảnh của cung lớn A'B' cho bởi phép quay $R(A; \varphi)$; cung A"B" nằm trên đường tròn (O"; R), ảnh của đường tròn (O'; R) trong phép quay trên.

Nhận xét rằng $B' \equiv B" \equiv A$.

57. Hãy dựng một hình vuông có 4 đỉnh nằm trên 4 cạnh của một hình bình hành.

Hướng dẫn

Xem hình vuông ABCD tâm O.

Giả sử ta đã dựng được hình vuông MNPQ có 4 đỉnh nằm trên các cạnh của hình bình hành đã cho: $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$, $Q \in (DA)$.

Hãy chứng minh O là tâm của hình vuông MNPQ phải dựng.

Giải

Cho hình vuông ABCD tâm O.

Giả sử ta đã dựng được hình vuông MNPQ có các đỉnh M, N, P, Q nằm trên các cạnh của hình bình hành ABCD đã cho (Hình 91).

$M \in (AB)$; $N \in (BC)$; $P \in (CD)$; $Q \in (DA)$.

Ta có: $\Delta AMQ = \Delta CPN$ (Vì sao?)

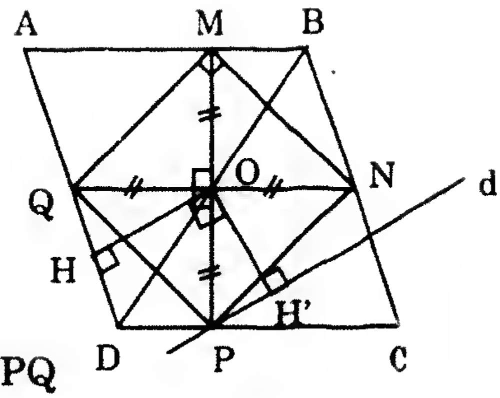
$\Rightarrow \Delta AOQ = \Delta CON$

$\Rightarrow \widehat{AOQ} = \widehat{CON}$

$\Rightarrow$ Q, O, N thẳng hàng.

Tương tự, ta có: P, O, N thẳng hàng.

Do đó O là tâm của hình vuông MNPQ



Hình 91

Ta có: OP = OQ

$(\overline{OQ}; \overline{OP}) = 90^0 + k.360^0$, $k \in Z$.

Suy ra P là ảnh của Q trong phép quay $R(O; 90^0)$ tâm O, góc quay $\theta = 90^0$.

Như vậy P là giao điểm của CD và ảnh của AD cho bởi phép quay $R(O; 90^0)$.

- Dựng điểm P.

  Kẻ $OH \perp AD$ tại H.

  Dựng H' là ảnh của H trong phép quay $R(O; 90^0)$.

  Kẻ đường thẳng $d \perp OH'$ tại H', d cắt CD tại P.

- PO cắt AB tại M, ...

  Ta dựng được hình vuông MNPQ.

58. Cho hai đường thẳng cố định D, Δ và một điểm cố định A. Hãy dựng đoạn thẳng BC sao cho $B \in D$, $C \in \Delta$ và tam giác ABC cân tại A có góc ở đỉnh $\widehat{A} = \alpha^0$.

Hướng dẫn

Dựng $AH \perp D$ tại H. Tìm ảnh H' của điểm H trong phép quay $R(A; \alpha^0)$ theo một chiều quay nào đó (theo chiều quay dương chẳng hạn). Lúc đó đường thẳng D có ảnh là đường thẳng **D'** cho bởi phép quay $R(A; \alpha^0)$.

Có nhận xét gì? Suy ra cách dựng.

Giải

Giả sử ta đã dựng được tam giác ABC cân tại A, có $\widehat{A} = \alpha^0$ và $B \in D$, $C \in \Delta$.

Ta suy ra C là ảnh của B trong phép quay $R(A; \alpha^0)$ tâm A góc quay α^0 theo chiều quay dương.

Dựng $AH \perp D$ tại H.

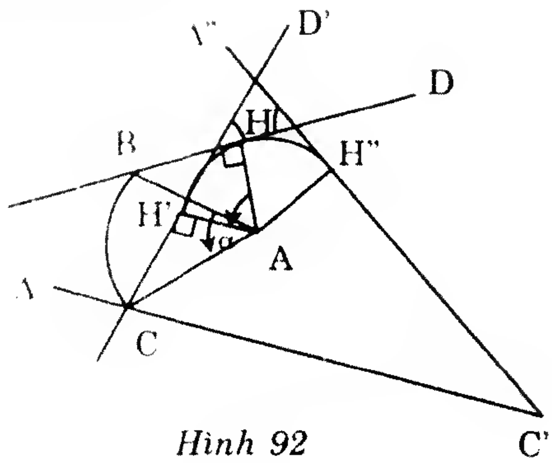
Gọi H' là ảnh của H cho bởi phép quay đó

Dựng đường thẳng D' vuông góc với AH' tại H' (hoặc D' tiếp xúc với đường tròn (A; AH) tại H').

D' là ảnh của D cho bởi phép quay R(A; α^0).

D' cắt Δ ở C.

Gọi B là ảnh của C cho bởi phép quay R(A; $-\alpha^0$), đương nhiên B $\in$ D



Hình 92

ΔABC cân tại A, $\widehat{BAC} = \alpha^0$ với B $\in$ D và C $\in$ Δ, là tam giác cần dựng (Hình 92).

Biện luận:

- Để D' cắt Δ thì góc của Δ và D phải khác α^0.
- Gọi H" là ảnh của H cho bởi phép quay R(A; $-\alpha^0$), đường thẳng D biến thành đường thẳng D" $\perp$ AH" tại H", D" cắt Δ tại C'. Ta dựng được tam giác A'B'C' cân tại A, có $\widehat{A} = \alpha^0$ với B' $\in$ D và C' $\in$ Δ. Bài toán có hai nghiệm hình.

Cần nhớ rằng góc của D hợp với D' và D" bằng nhau và bằng α^0.

* Nếu một trong hai đường thẳng qua A, D chẳng hạn, thì sao?

Lúc đó, ảnh của A trong phép quay R(A; α^0) hoặc R(A; $-\alpha^0$) chính là A.

Qua A, dựng đường thẳng D' (hoặc D") hợp với D góc α^0, D' (hoặc D") cắt Δ tại C (hoặc C"): Bài toán có hai nghiệm hình.

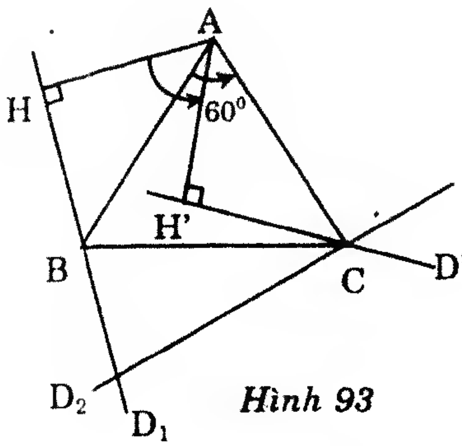
***59.** Cho điểm A và hai đường thẳng D_1, D_2 giao nhau, không đi qua A. Hãy dựng một tam giác đều ABC với B $\in$ D_1 và C $\in$ D_2.

Giải

- Giả sử ta đã dựng được tam giác đều ABC với đỉnh A cho trước và B $\in$ D_1, C $\in$ D_2.

Có thể giả sử thêm rằng $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) > 0$ $\Rightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 60^0$.

Như vậy C là ảnh của B trong phép quay R(A; 60^0).



Hình 93

tâm A, góc quay $\theta = 60^0$.

Gọi D'_1 là ảnh của D_1 cho bởi phép quay $R(A; 60^0)$

$\Rightarrow D'_1$ đi qua C.

Do đó C là giao điểm của D_2 và D'_1 (Hình 93)

• *Cách dựng:*

Dựng $AH \perp D_1$ tại H.

Dựng H', ảnh của H cho bởi phép quay $R(A; 60^0)$.

Dựng $D'_1 \perp AH$ tại H'; D'_1 là ảnh của D_1 trong phép quay trên.
Đường thẳng D'_1 cắt đường thẳng D_2 tại C.

Phép quay $R(A; -60^0)$ biến điểm C thành điểm B dĩ nhiên $B \in D_1$.

Tam giác ABC là tam giác đều phải dựng.

• *Chứng minh*

Ta có: $C \xrightarrow{R(A;-60^0)} B$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) = -60^0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

• *Biện luận*

+ Nếu D'_1 và D_2 giao nhau: Với hai phép quay $R(A; 60^0)$, $R(A; -60^0)$, ta dựng được hai tam giác đều ABC: Bài toán có hai nghiệm hình.

+ Nếu D_1 và D_2 hợp với nhau một góc 60^0 và điểm A cho trước nằm trên đường phân giác t'At của góc tù.
Ảnh của D_1 cho bởi phép quay $R(A; 60^0)$ hoặc $R(A; -60^0)$ là D'_1 sẽ trùng với D_2: Có vô số điểm C. Bài toán có vô số nghiệm hình.

+ Nếu D_1 và D_2 hợp với nhau góc 60^0 và điểm A nằm ngoài đường phân giác t'At.

Ta có: $D'_1 \,//\, D_2 \Leftrightarrow \nexists$ C.

Bài toán không có nghiệm hình.

***60.** Hãy dựng một tam giác đều ABC có 3 đỉnh nằm trên 3 đường thẳng song song (D_1), (D_2), (D_3).

Hướng dẫn

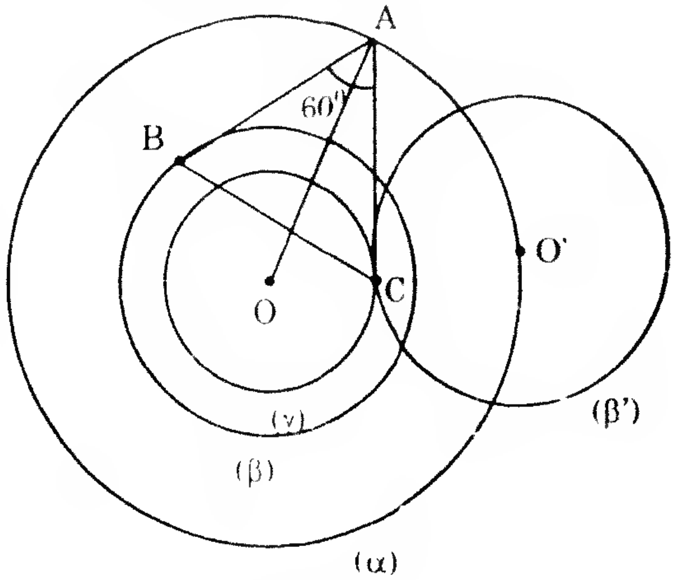
Lấy $A \in D_3$. (Xem bài 59).

***61.** Hãy dựng một tam giác đều ABC có 3 đỉnh nằm trên 3 đường tròn đồng tâm (α), (β), (γ).

Giải

• Giả sử ta đã dựng được tam giác đều ABC thỏa yêu cầu của bài toán.

Có thể giả sử thêm rằng: $A \in (\alpha)$, $B \in (\beta)$, $C \in (\gamma)$ và $(\vec{AB}; \vec{AC}) = 60^0$.
Suy ra C là ảnh của B trong phép quay $R(A; 60^0)$ tâm A, góc quay 60^0.
Phép quay $R(A; 60^0)$ biến đường tròn (β) tâm O, bán kính R_2 thành đường tròn (β'), tâm O', bán kính R_2 với O' là ảnh của O trong phép quay trên, $O' \in (\alpha)$.



Hình 94

Do đó C là giao điểm của đường tròn (γ) tâm O, bán kính R_3 với đường tròn (β').

- *Cách dựng:* Lấy điểm A tùy ý nằm trên đường tròn (α) tâm O, bán kính R_1 (Giả sử $R_1 > R_2 > R_3$).
  Dựng điểm O', ảnh của O trong phép quay $R(A; 60^0)$.
  Dựng đường tròn (β') tâm O', bán kính R_1; (β') chính là ảnh của (β) cho bởi phép quay $R(A; 60^0)$.
  Suy ra $C \in (\beta')$.
  Do đó C là giao điểm của đường tròn (γ) và đường tròn (β').
  Dựng điểm B, ảnh của C trong phép quay $R(A; -60^0)$, $B \in (\beta)$.
  Tam giác ABC là tam giác đều phải dựng.
- Chứng minh: Học sinh tự chứng minh.
- Biện luận:

+ Nếu $R_1 < R_2 + R_3$: (β') và (γ) có hai điểm chung C_1 và C_2; bài toán có hai nghiệm hình ứng với mỗi vị trí của $A \in (\alpha)$.
+ Nếu $R_1 > R_2 + R_3$:
  Không có nghiệm hình.
+ Nếu $R_1 = R_2 + R_3$: (β') và (γ) tiếp xúc ngoài ở C: Bài toán có một nghiệm hình.

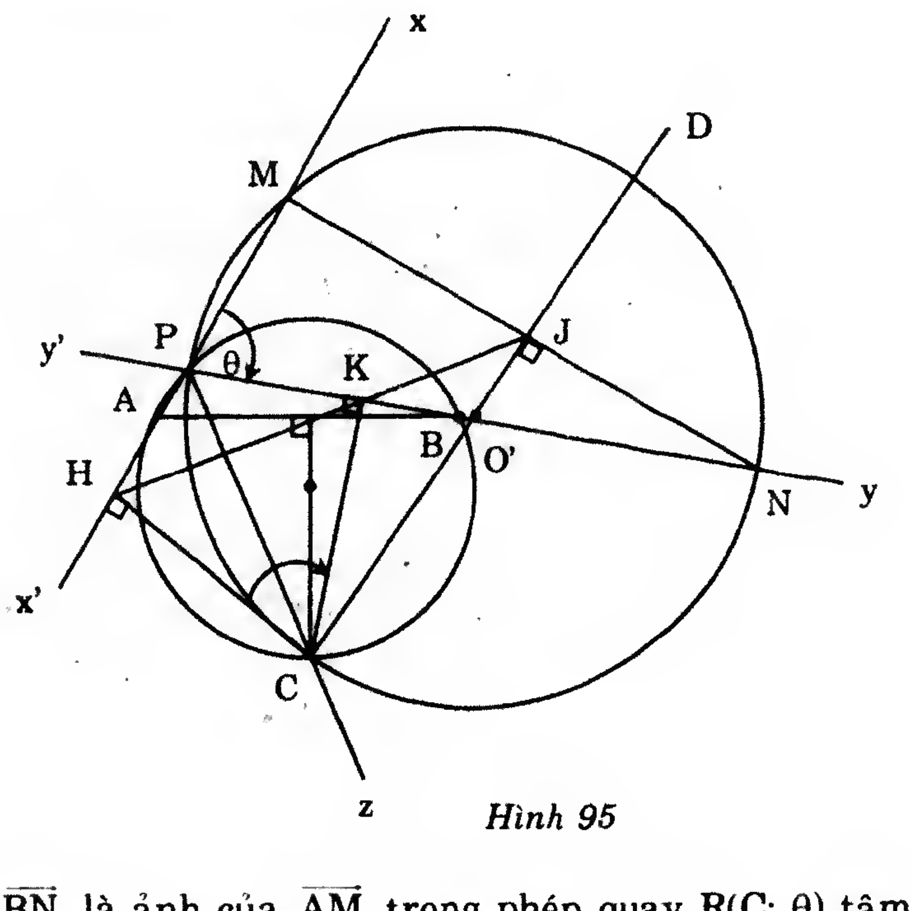
*** 62.** Cho hai đường thẳng x'Px và y'Py. Lấy A, M $\in$ x'x và B, N $\in$ y'y với A, B cố định và M, N di động, P nằm giữa A và M, B nằm giữa P và N sao cho: AM = BN.

1. Chứng minh rằng hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{BN}$ đối ứng nhau trong một phép quay R(C; θ) có góc quay θ không đổi và tâm quay C cố định.
2. Chứng tỏ đường tròn (α) ngoại tiếp ΔPMN luôn luôn đi qua hai điểm cố định.
3. Tìm tập hợp các trung điểm J của đoạn MN.
4. Cho A và B di động. Tìm tập hợp (E) các tâm quay C của phép quay R(C; θ) ở trên.

Giải

1. Đặt $(\overrightarrow{x'Px}; \overrightarrow{y'Py}) = \theta + k.360^0$, $k \in Z$.

Ta có: $\begin{cases} AM = BN \\ (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BN}) = \theta + k360^0, k \in Z \end{cases}$



Hình 95

Do đó $\overrightarrow{BN}$ là ảnh của $\overrightarrow{AM}$ trong phép quay R(C; θ) tâm C, góc quay θ, với C là giao điểm của đường tròn (β) ngoại tiếp ΔPAB và trung trực Δ của đoạn AB.

Vì ba điểm P, A, B cố định nên C cố định (Hình 95).

2. Theo tính chất của phép quay, 4 điểm P, C, M, N cùng nằm trên một đường tròn.

Do đó đường tròn (α) ngoại tiếp ΔPMN đi qua hai điểm cố định P và C.

3. Xét ΔPMN nội tiếp đương tron (α) và $C \in (\alpha)$.

Kẻ $CH \perp x'x$, $CK \perp y'y$.

Ta có: $CH \perp PM$, $CK \perp PN$ và CJLMN nên 3 điểm H, K, J thẳng hàng (Học sinh tự chứng minh).

H và K cố định suy ra tập hợp các điểm J là đường thẳng HK.

(Trong toán học, đường thẳng này được gọi tên là đường thẳng Simson ứng với điểm C của đường tròn (α) và cũng là đường thẳng Simson ứng với đường tròn (β)).

Phần đảo: Học sinh tự chứng minh.

4. Ta có: $\overrightarrow{AM} \xrightarrow{R(C,\theta)} \overrightarrow{BN}$.

Suy ra $H \xrightarrow{R(C;\theta)} K$

$\Rightarrow CH = CK$.

Như vậy: C nằm trên tia phân giác Pz của góc hợp bởi hai đường thẳng x'Px và y'Py.

Do đó khi A và B di động, ta có tập hợp C các tâm quay C là tia Pz

* **63.** Cho tam giác ABC với $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 60^0$ và AC > AB.

Hãy dựng một đoạn thẳng MN sao cho:

$$\begin{cases} M \in [AB],\ N \in [AC] \\ BM = CN \\ MN = \dfrac{1}{2}BC \end{cases}$$

Hướng dẫn

Chứng minh trung trực Δ của cạnh BC và trung trực Δ' của đoạn thẳng MN cắt nhau tại một điểm I nằm trên đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC.

Giải

- Giả sử ta đã dựng được đoạn thẳng MN thỏa yêu cầu của bài toán:

$$\begin{cases} M \in [AB],\ N \in [AC] \\ BM = CN \\ MN = \dfrac{1}{2}BC \end{cases}$$

Dựng đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC.

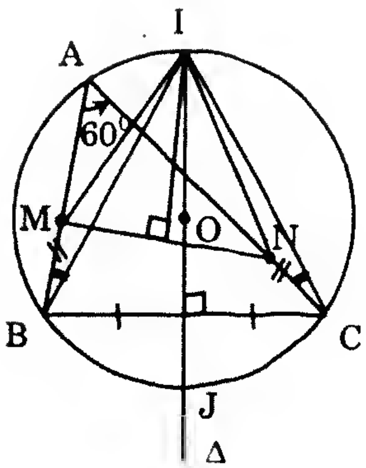
Gọi I là giao điểm của (O) và trung trực Δ của cạnh BC.

Ta có: $\Delta IMB = \Delta INC$ (c.g.c)

$\Rightarrow IM = IN$.

Do đó I nằm trên trung trực Δ' của đoạn MN (Hình 96)

ΔINC là hình biến của ΔIMB cho bởi phép quay $R(I; 60^0)$ theo chiều quay dương.



Hình 96

Các tam giác IBC và IMN là các tam giác đều.

Ta có: $\Delta IMN \backsim \Delta IBC$.

Tỉ số đồng dạng: $k = \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow IM = \dfrac{IB}{2}$.

• *Cách dựng:*

– Dựng đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC.

– Dựng trung trực Δ của cạnh BC; Δ cắt đường tròn (O) tại I, J nằm cùng phía với điểm A đối với BC.

– Dựng đường tròn tâm I, bán kính $\rho = \dfrac{IB}{2} = \dfrac{BC}{2}$ cắt AB tại M.

– Dựng điểm N ảnh của điểm M cho bởi phép quay $R(I; 60^0)$.

Đoạn thẳng MN là đoạn thẳng phải dựng.

• *Chứng minh:*

Trong phép quay $R(I; 60^0)$, ta có:

$$B \longmapsto C$$

$$M \longmapsto N$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BM} \longrightarrow \overrightarrow{CN} \\ (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CN}) = 60^0 \end{cases}$$

Do đó ta có: $N \in [AC]$

$\Rightarrow \Delta IMN \backsim \Delta IBC$, $k = \dfrac{1}{2} \Rightarrow MN = \dfrac{1}{2}BC$.

• *Biện luận:*

Vì $d(I, AB) \le \rho = \dfrac{BC}{2}$: Đường tròn (I) cắt AB ở hai điểm nằm về hai phía của A: Bài toán có một nghiệm hình.

64. Cho hai tia Ax và By không cắt nhau.

Hãy dựng một đường thẳng Δ cắt Ax và By theo thứ tự tại M và N sao cho: $\begin{cases} AM = BN \\ MN = l \end{cases}$

l là một độ dài cho trước.

Hướng dẫn: Xem bài 63.

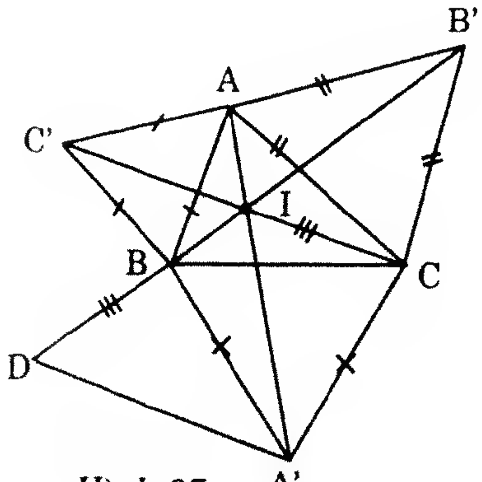
Học sinh tự giải.

65. Cho tam giác ABC. Về phía ngoài tam giác, dựng các tam giác đều A'BC, B'CA và C'AB.

1. So sánh các đoạn thẳng AA', BB', CC'.
2. Chứng tỏ AA', BB', CC' đồng qui tại một điểm I.
3. Giả sử I nằm trong ΔABC. Trên tia đối của tia BI, lấy đoạn BD = IC.

   Chứng minh rằng: IA + IB + IC = AA'.

Giải



Hình 97

1. Giả sử AB nằm bên trái AC.

   Góc $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ có số đo dương.

   Trong phép quay R(A; -60^0), ta có:

   $B' \longrightarrow C$

   $B \longrightarrow C'$

   Suy ra: $BB' \longrightarrow C'C$.

   Do đó ta có: BB' = CC'.

   Tương tự, ta có: AA' = BB' = CC'.

2. Gọi I là giao điểm cua BB' và CC'.

   Ta có: (IA', IC) = (BA', BC) = $60^0 + k180^0$, $k \in Z$)

   ⇒ I là giao điểm thứ hai của CC' và đường tròn (α) ngoại tiếp ΔA'BC.

   Trong phép quay R(B; 60^0), AA' có ảnh là CC' (Hình 97).

   Gọi I' là giao điểm AA' và CC'.

   Ta có: (I'A; I'C') = (BA; BC') = $60^0 + k'180^0$ ($k' \in Z$)

   ⇔ (I'A'; I'C) = (BA'; BC) = $60^0 + k180^0$.

   Suy ra I' là giao điểm thứ hai của CC' và đường tròn (α).

   Do đó I' trùng với I nghĩa là AA', BB', CC' đồng qui tại I.

3. Trong phép quay $R(A'; 60^0)$, CI có ảnh là BD.

Suy ra: $A'I = A'D$ và $(\overrightarrow{A'I}; \overrightarrow{A'D}) = 60^0$.

Do đó $\Delta A'ID$ đều

$\Rightarrow IA' = ID = IB + BD = IB + IC$.

Mặt khác, ta có:

$AA' = IA + IA'$

$\Rightarrow AA' = IA + IB + IC$

Vậy: $IA + IB + IC = AA'$.

66. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O; R).

M là một điểm di động trên cung BC.

Trên tia đối của tia BM lấy một P sao cho BP = MC và trên tia đối của tia CM lấy một điểm Q sao cho CQ = MB.

Tìm tập hợp các điểm P, Q.

Hướng dẫn

Chứng minh MB + MC = MA.

Giải

Trên dây AM, lấy đoạn AD = BM

Ta chứng minh rằng DM = MC

Hai tam giác BCM và ACD có:

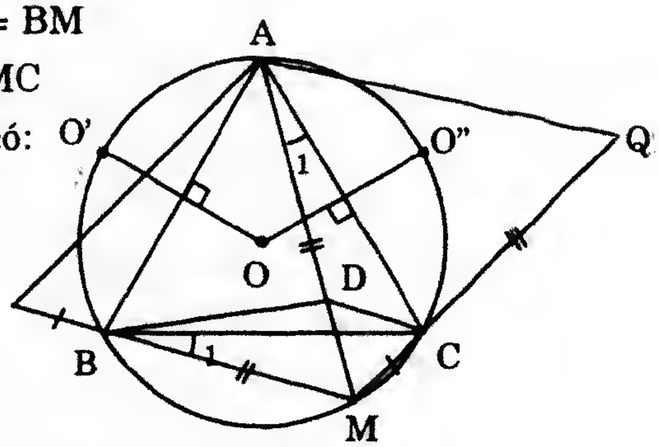
$\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$ (Vì sao?)

BC = AC (gt)

BM = AD nên bằng nhau

$\Delta BCM = \Delta ACD$

$\Rightarrow MC = CD$



Hình 98

Ta lại có: $\overset{\frown}{AMC} = \overset{\frown}{ABC} = 60^0$ nên ΔMCD là tam giác đều.

Suy ra: DM = MC.

Do đó ta có: MB + MC = MA.

Suy ra: MP = MQ = MA

$\overset{\frown}{AMB} = \overset{\frown}{AMC} = 60^0$.

Giả sử: $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 60^0$.

Tam giác AMP đều. Ta có: $\begin{cases} AP = AM \\ (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AP}) = -60^0 \end{cases}$

Suy ra P là ảnh của M trong phép quay R(A; -60^0) (Hình 98)

Do đó: Khi M chạy trên cung CB thì tập hợp các điểm P là cung BC', ảnh của cung CB cho bởi phép quay R(A; –60^0), nằm trên đường tròn (O'; R) với O' là ảnh của O trong phép quay trên. Lưu ý là O' $\in$ (O; R).

Tương tự: Tập hợp các điểm Q là cung CB', ảnh của cung BC cho bởi phép quay R(A; 60^0), nằm trên đường tròn (O"; R) với O" là ảnh của O và O" $\in$ (O).

67. Cho hai trục x'x và y'y vuông góc với nhau tại O; z'Oz là đường phân giác của góc xOy.

Một đường tròn (α) di động đi qua O và C. C $\in$ z'Oz cố định, cắt x'x tại M và y'y tại N.

1. Chứng tỏ $\overline{OM} + \overline{ON}$ không đổi.
2. Giả sử có một đường tròn cố định (β) đi qua O và C, cắt x'x tại A và y'y tại B.

   Hỏi có tồn tại phép quay R nào biến $\overrightarrow{AM}$ thành $\overrightarrow{BN}$ hay không?

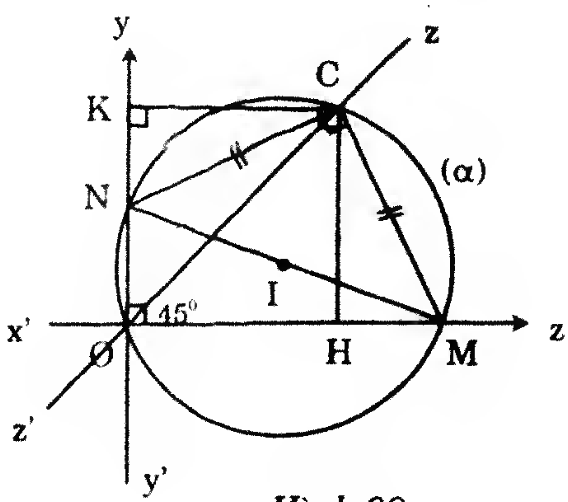
   Hướng dẫn

   Để ý rằng điểm C nằm trên tia phân giác z'Oz của góc $\widehat{xOy}$

Giải

1. Ta có: $\widehat{MON} = 90^0$ nên MN là đường kính của đường tròn (α).

   C nằm trên tia phân giác Oz của góc xOy nên ta có:



Hình 99

   $\overset{\frown}{CM} = \overset{\frown}{CN} \Leftrightarrow CM = CN$

   OH = OK (Hình 99)

   Phép quay R(C; –90^0) biến $\overrightarrow{HM}$ thành $\overrightarrow{KN}$

   $\Rightarrow \overline{HM} = -\overline{KN} = \overline{NK}$

   $\Rightarrow \overline{OM} - \overline{OH} = \overline{OK} - \overline{ON}$

   $\Leftrightarrow \overline{OM} + \overline{ON} = \overline{OK} + \overline{OH}$

   Do đó tổng $\overline{OM} + \overline{ON}$ không đổi.

2. Phép quay phải tìm chính là phép quay R(C; –90^0).

***68.** Cho đoạn thẳng cố định AB, M là một điểm di động trên đoạn thẳng đó.

Trong cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB, dựng các tam giác đều PAM và QMB.

Gọi C là giao điểm của PA và QB.

1. Tìm tập hợp (E) các trung điểm I của đoạn thẳng PQ.
2. Chứng minh rằng tâm của đường tròn (α) ngoại tiếp ΔMPQ là một điểm cố định.
3*. Tìm tập hợp (T) tâm J của đường tròn (β) ngoại tiếp ΔCPQ.

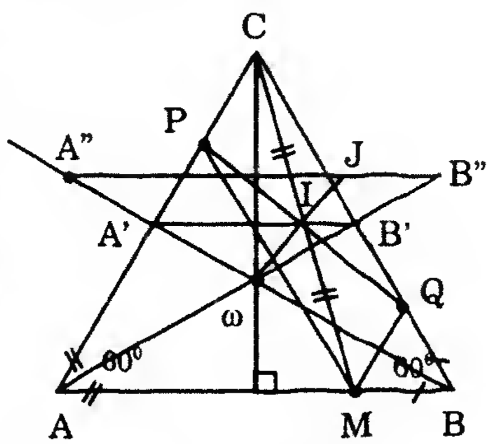
Giải

1. Tam giác CAB có $\hat{A} = \hat{B} = 60^0$ nên là một tam giác đều có cạnh AB = a cố định nên C cố định.

CPMQ là một hình bình hành nên trung điểm I của PQ cũng là trung điểm của CM.

Ta có: $\overline{CI} = \dfrac{1}{2}\overline{CM}$.

Suy ra I là ảnh của M trong phép vị tự $H(C; \dfrac{1}{2})$ tâm C tỉ số $k = \dfrac{1}{2}$. (Hình 100)



Hình 100

Do đó khi M chạy trên đoạn thẳng AB = a thì tập hợp (E) các điểm I là đoạn thẳng A'B' = $\dfrac{1}{2}$a, ảnh của AB cho bởi phép vị tự $H(C; \dfrac{1}{2})$, với A' là trung điểm của CA và B' là trung điểm của CB; A' và B' theo thứ tự là ảnh của A và B trong phép vị tự $H(C; \dfrac{1}{2})$.

2. Ta có:

- AP = PM, PM = CQ $\Rightarrow$ AP = CQ.
- $(\overrightarrow{AP}; \overrightarrow{CQ}) = -120^0$.

Do đó $\overrightarrow{CQ}$ là ảnh của $\overrightarrow{AP}$ trong một phép quay R(ω; -120^0) tâm ω, góc quay $\theta = -120^0$, tâm ω là giao điểm của các trung trực của AC và CB, ω là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔCAB. Suy ra ω cố định; ω cũng nằm trên trung trực của PQ.

2. Các tam giác CAB và QMB đều.

Các cạnh CA và QM có chung trung trực Bx.

Tương tự: CB và PM có chung trung trực Ay.

Do đó tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMPQ trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp ω của ΔCAB.

Vậy: Tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMPQ là một điểm cố định.

3. Các tam giác CPQ và MQP đối xứng nhau qua I nên hai đường tròn ngoại tiếp của chúng cũng đối xứng nhau qua I.

Suy ra J và ω đối xứng nhau qua I.

Ta có: $\vec{\omega J} = 2\vec{\omega I}$.

J là ảnh của I trong vị tự (ω; 2) tâm ω tỉ số k = 2.

Khi I chạy trên đoạn thẳng A'B' thì tập hợp các điểm J là đoạn A"B" song song và bằng đoạn AB, ảnh của A'B' cho bởi phép vị tự H(ω; 2).

69. Cho tam giác ABC.

1. Xét các phép quay R(A; α) và R(B; β).

Định α và β sao cho C bất biến trong tích R(A; α).R(B; β).

2. Gọi: $R_1 = R(A; 2\alpha)$

$R_2 = R(B; 2\beta)$

$R_3 = R(C; 2\gamma)$

Với $\alpha = (\vec{AC}; \vec{AB})$; $\beta = (\vec{BA}; \vec{BC})$; $\gamma = (\vec{CB}; \vec{CA})$.

Chứng tỏ rằng tích

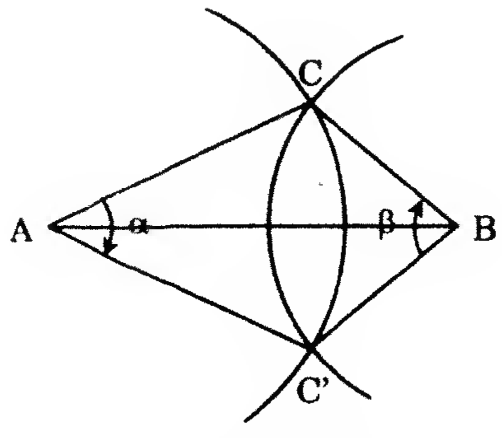
$$R_1 \times R_2 \times R_3$$

là một phép biến đổi đồng nhất.

Giải

1. Trong phép quay R(A; α), gọi C' là ảnh của điểm C, suy ra C' nằm trên đường tròn (A) tâm A bán kính R = AC.

Điểm C bất biến trong phép biến hình R(A; α).R(B; β) nên C' là ảnh của C cho bởi phép quay R(B; β). (Hình 101)



Hình 101

Suy ra C' nằm trên đường tròn (B) tâm B bán kính R' = BC.

Do đó C và C' là giao điểm của hai đường tròn (A) và (B).

Suy ra C và C' đối xứng với nhau qua đường thẳng AB.

Ta có: $|\alpha| = 2\widehat{BAC}$

$|\beta| = 2\widehat{ABC}$

2. Ta biết rằng một phép quay có thể xem là tích của hai phép đối xứng

$$R_1 = R(A; 2\alpha) = S(AC) \times S(AB)$$

$$R_2 = R(A; 2\beta) = S(BA) \times S(BC)$$

$$R_3 = R(C; 2\gamma) = S(CB) \times S(CA)$$

$\Rightarrow R_1 \times R_2 \times R_3 = I$, phép biến hình đồng nhất.

70. Trong mặt phẳng (Oxy).

Trên trục x'Ox, lấy một điểm A cố định là một điểm M di động; trên trục y'Oy, lấy một điểm B cố định và một điểm N di động sao cho

$$\begin{cases} \overline{OA} = \overline{OB} = a \\ \overline{OM} + \overline{ON} = a \end{cases}$$

với a là một độ dài đã biết.

1. Chứng minh rằng trung trực (Δ) của đoạn thẳng MN luôn luôn đi qua một điểm cố định C.
2. Tìm tập hợp (E) trung điểm I của đoạn thẳng MN.
3. Gọi P là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật MONP.

   Tìm tập hợp (T) các điểm P.

Hướng dẫn

1. Để ý phép biến hình f biến đổi $\overrightarrow{AM}$ thành $\overrightarrow{BN}$.
2. Vận dụng tính chất của phép quay.
3. So sánh các vectơ $\overrightarrow{OP}$ và $\overrightarrow{OI}$.

Giải

1. Các vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{BN}$ có cùng độ dài (Vì sao?) và vuông góc với nhau nên ta có thể xem chúng suy từ nhau trong một phép quay $R(C; 90^0)$ tâm quay C góc quay $\theta = 90^0$.

$$\overrightarrow{AM} \xrightarrow{R(C;90^0)} \overrightarrow{BN}$$

Dĩ nhiên trung trực Δ của đoạn thẳng MN đi qua tâm quay C.

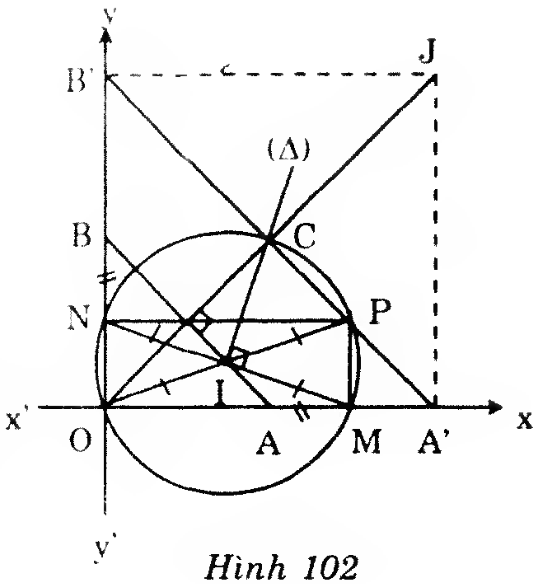
2. C là giao điểm của trung trực OJ của đoạn thẳng AB và đường tròn ngoại tiếp ΔOMN, trung điểm I của đoạn MN là tâm đường tròn. Suy ra I nằm trên trung trực của BC.

Giới hạn: Khi M → A thì N → B

Khi M → O thì N → B', OB' = 2a

Khi N → O thì M → A', OA' = 2a

Tập hợp (E) các điểm I là đoạn thẳng AB (Hình 102).



Hình 102

3. MONP là một hình chữ nhật nên ta có

$$OP = 2OI \Rightarrow \overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OI}$$

P là ảnh của I trong phép vị tự H(O; 2) tâm vị tự O, tỉ số vị tự k = 2.

Ta có: $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OB'} = 2\overrightarrow{OB}$

Do đó khi I chạy trên đoạn thẳng AB thì tập hợp (T) các điểm P là đoạn thẳng A'B', ảnh của AB cho bởi phép vị tự H(0; 2)

71. Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O'). Lấy A, M thuộc (O) và B, N thuộc (O'), A và B cố định, M và N di động sao cho:

$$(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{O'B}; \overrightarrow{O'N}).$$

1. Chứng minh rằng trung trực Δ của đoạn MN luôn luôn đi qua một điểm cố định.

2. Gọi M' là điểm đối tâm của điểm M.

Chứng minh rằng trung trực Δ' của đoạn M'N luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Học sinh tự giải.

Chương V. PHÉP ĐỒNG DẠNG

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Tam giác đồng dạng

1. Định nghĩa: Hai tam giác được gọi là đồng dạng khi chúng có:

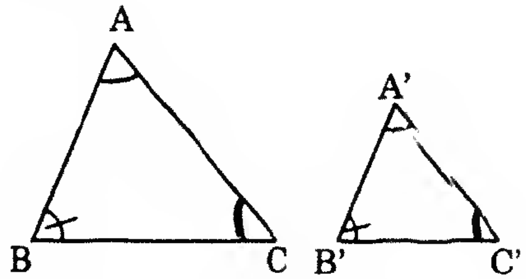
– Các góc bằng nhau đôi một.

– Các cạnh tương ứng tỉ lệ (Hình 103)

Nếu hai tam giác A'B'C' và ABC đồng dạng với nhau thì ta viết:

$$\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A'} = \widehat{A};\ \widehat{B'} = \widehat{B};\ \widehat{C'} = \widehat{C} \\ \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA} = k \end{cases}$$



Hình 103

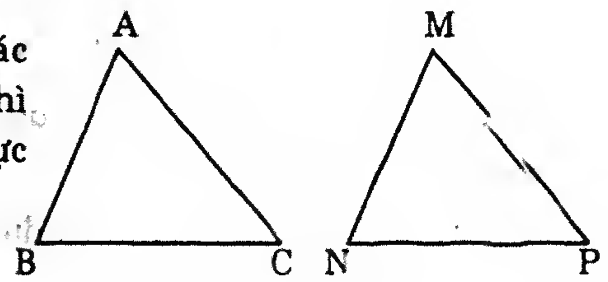
Tỉ số k của hai độ dài tương ứng của hai tam giác đồig dạng được gọi là tỉ đồng dạng.

TD: Cho $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.

Tỉ số hai đường cao tương ứng h'_a và h_a, tỉ số hai trung tuyến tương ứng m'_a và m_a, ..., bằng tỉ số đồng dạng:

$$\frac{h'_a}{h_a} = \frac{m'_a}{m_a} = \dots = \frac{a'}{a} = k$$

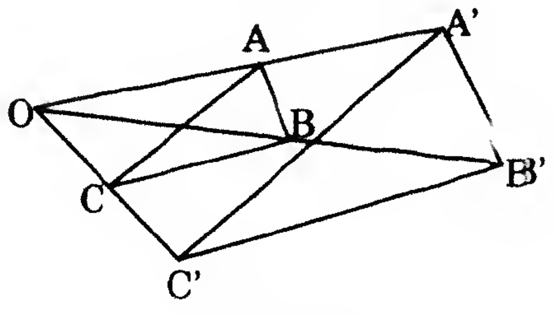
* Nếu hai tam giác có các cạnh đôi một song song thì được gọi là đồng dạng trực tiếp (Hình 104).



Hình 104

TD: Phép vị tự H(O; k) biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$ đồng dạng trực tiếp với ΔABC.

Tỉ số đồng dạng chính là tỉ số vị tự k. (Hình 105).



Hình 105

2. Tính chất

a) Mỗi tam giác được xem là đồng dạng với chính nó.

$$\Delta ABC \backsim \Delta ABC$$

Tỉ số đồng dạng k = 1

b) Nếu $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ thì $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$

c) Nếu ta có: $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$

và $\Delta A'B'C' \backsim \Delta A''B''C''$

thì $\Delta ABC \backsim \Delta A''B''C''$

3. Định lí:

Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác thì đường thẳng đó hợp với hai cạnh còn lại (hoặc với phần kéo dài của hai cạnh còn lại) một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.

4. Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác (xem SGK lớp 8).

II. Phép đồng dạng

1. Định nghĩa

Phép đồng dạng trong mặt phẳng, gọi tắt là phép đồng đạng phẳng, là một phép biến hình, biến hai điểm A; B thuộc mp (P) thành hai điểm A', B' thuộc mp (P) sao cho A'B' = k.AB, k là một số thực dương; k được gọi là tỉ số đồng dạng.

2. Định lí 1:

Phép đồng dạng là tích số của một phép vị tự dương và một phép quay hoặc tích số của một phép quay và một phép vị tự dương.

Tâm của phép vị tự và tâm quay không bắt buộc phải trùng nhau.

Nếu tâm vị tự và tâm quay trùng nhau với điểm O thì phép đồng dạng được kí hiệu là

$$S_{(}(O; k; \theta).$$

Ta có: $H(O, k) \times R(O; \theta) = (O; k; \theta)$.

TD: • Phép dời hình là một phép đồng dạng tỉ số k = 1.

• Phép vị tự là một phép đồng dạng có tỉ số bằng trị tuyệt đối của tỉ số vị tự.

• Đảo ngược của phép đồng dạng tỉ k là một phép đồng dạng có tỉ số

$$k' = \frac{1}{k}.$$

Ta suy ra: Trong một phép đồng dạng:

+ Ảnh của một đường thẳng là một đường thẳng

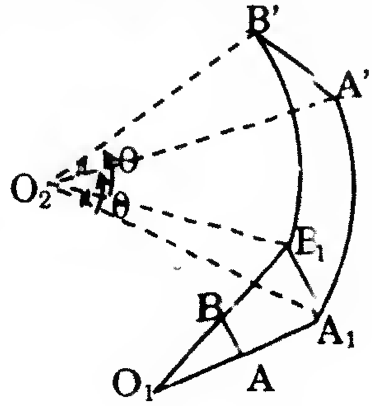
+ Ảnh của một góc là một góc bằng nó.

3. *Định lí 2:*

a) Định lí thuận: A', B' và A, B là hai cặp điểm đối ứng trong một phép đồng dạng thì

+ Tỉ số giữa hai đoạn thẳng A'B' và AB bằng tỉ số vị tự.

+ Góc của vectơ A'B' với vectơ AB bằng góc quay (Hình 106)



Hình 106

$$A \xmapsto{H(O_1;k)\,\times\,R(O_2)\theta} A'$$

$$B \xmapsto{H(O_2;k)\,\times\,R(O_2)\theta} B'$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{A'B'}{AB} = k \\ (\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{A'B'}) = \theta \end{cases}$$

b) Định lí đảo:

Cho hai hình phẳng (F) và (F').

Nếu ứng với mỗi cặp điểm (A; B) của hình (F), ta có nột cặp điểm (A'; B') của hình (F') mà:

$$\begin{cases} \dfrac{A'B'}{AB} = k \\ (\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{A'B'}) = \theta \end{cases}$$

với θ và k không đổi thì hai hình (F) và (F') tương ứng nhau trong một phép đồng dạng Si.

4. *Định lí 3:*

Tích số của hai phép đồng dạng là một phép đồng dạng có:

+ Tỉ số bằng tích các tỉ số: $k = k_1k_2$.

+ Góc bằng tổng các góc: $\theta = \theta_1 + \theta_2$.

LUYỆN TẬP

72. Trong một phép đồng dạng, có một điểm bất biến gọi là tâm đồng dạng. Làm thế nào để xác định tâm đồng dạng nếu biết điểm ảnh của điểm A cho trước là điểm A'?

Giải

Gọi O là tâm đồng dạng của phép đồng dạng Si(O; k; θ).

O bất biến nên ta có:

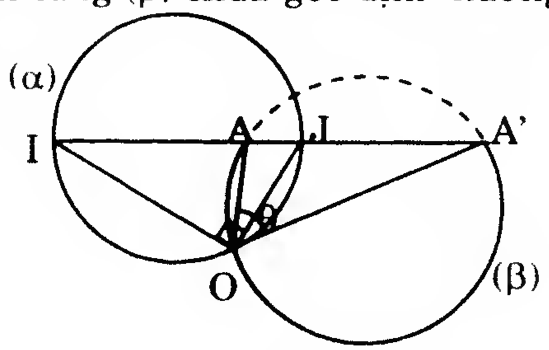
$$\begin{cases} OA' = kOA,\ k \neq 1 & (a) \\ (\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OA'}) = \theta & (b) \end{cases}$$

Gọi I và J là hai điểm nằm trên đường thẳng AA' sao cho:

$$\overline{IA'} = k.\overline{IA}$$
$$\overline{JA'} = k.\overline{JA}.$$

- Từ (a): Ta suy ra điểm O nằm trên đường tròn (α) đường kính IJ. (Đường tròn này được gọi là đường tròn Apollonius). (Hình 107)
- Từ (b), ta suy ra điểm O nằm trên cung (β) chứa góc định hướng θ giới hạn bởi hai điểm A và A'.

Đường tròn (α) và cung (β) cắt nhau tại một điểm duy nhất O. Đó là tâm đồng dạng của phép đồng dạng S_i(O; k; θ) đã biến điểm A thành điểm A'.



Hình 107

73. Cho $\overrightarrow{A'B'}$ là ảnh của $\overrightarrow{AB}$ trong phép đồng dạng Si(O; k; θ). Hãy xác định k, θ và tâm O.

Giải

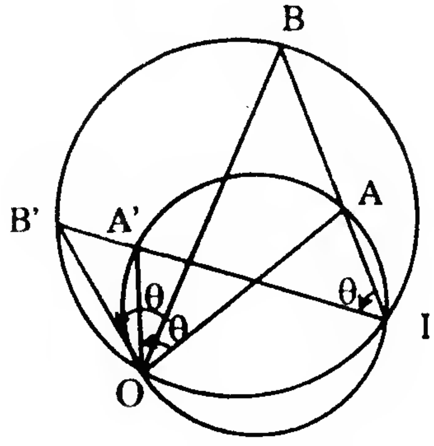
- Tỉ số đồng dạng:

$$k = \frac{A'B'}{AB}.$$

- Góc đồng dạng:

$$\theta = (\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{A'B'})$$

- Xác định tâm O:
  + Cách 1: xem bài 72.
  + Cách 2: (Hình 108)



Hình 108

Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AB và A'B' ta có:

$$(IA; IA') = \theta + m.180^0$$

$$(IB; IB') = \theta + m.180^0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(IA; IA') = (OA; OA') \\ (IB; IB') = (OB; OB')\end{cases}$$

Do đó tâm O là giao điểm thứ hai của các đường tròn (α) ngoại tiếp $\Delta IAA'$ và đường tròn (β) ngoại tiếp $\Delta IBB'$.

74. Cho hai đường tròn không bằng nhau (I; R) và (I'; R').

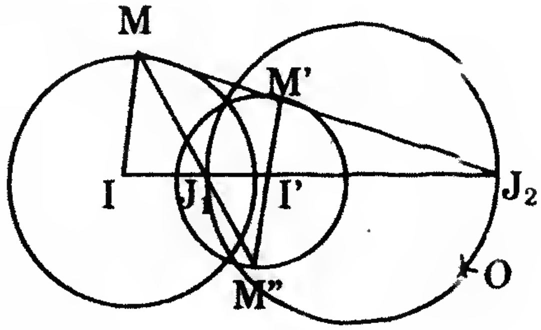
Hai đường tròn này có tương ứng với nhau trong một phép đồng dạng nào hay không?

Giải

Giả sử có một phép đồng dạng $S_i(O; k: \theta)$ biến đường tròn (I; R) thành đường tròn (I'; R') (Hình 109)

Ta suy ra:

- $I \xrightarrow{Si(O;k;\theta)} I'$
- $k = \dfrac{R'}{R}$
- $\dfrac{OI'}{OI} = k = \dfrac{R'}{R}$



Hình 109

Gọi J_1 và J_2 là điểm chia đoạn II' theo tỉ k và –k.

$$\Rightarrow \frac{OI'}{OI} = \frac{J_1I'}{J_1I} = \frac{J_2I'}{J_2I}$$

Do đó O nằm trên đường tròn (α) đường kính J_1J_2.

J_1 và J_2 chính là hai tâm vị tự biến đường tròn (I; R) thành đường tròn (I'; R').

Nếu (I) và (I') giao nhau tại A và B thì (α) đi qua A và B. (Đường tròn (α) được gọi là đường tròn đồng dạng của các đường tròn (I; R) và (I'; R') đã cho).

Vậy: Hai đường tròn không bằng nhau (I; R) và (I'; R') có thể xem tương ứng nhau trong vô số phép đồng dạng mà tỉ số đồng dạng là $k = \dfrac{R'}{R}$ $\left(\text{hoặc } k = \dfrac{R}{R'}\right)$, có tâm đồng dạng nằm trên đường tròn đồng dạng của hai đường tròn đã cho.

75. Cho hình chữ nhật ABCD có:

AB = a; AD = 2a; $(\vec{AB}; \vec{AD}) = 90^0 + k.360^0$, $k \in Z$.

Gọi I là trung điểm của cạnh BC.

Xác định phép đồng dạng:

a) Biến vectơ $\vec{AB}$ vectơ $\vec{BC}$.

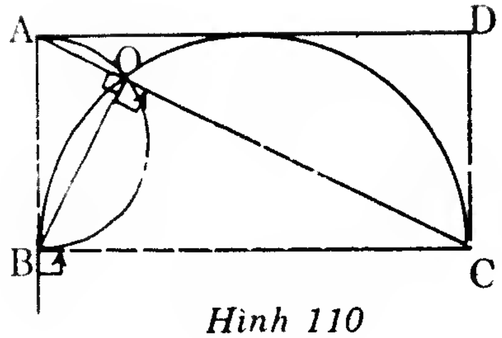
b) Biến $\vec{AB}$ thành $\vec{ID}$.

Giải

1. Ta có:

$$\begin{cases} BC = 2AB \\ (\vec{AB}; \vec{BC}) = 90^0 + k360^0 \end{cases}$$

Do đó $\vec{BC}$ là ảnh của $\vec{AB}$ trong phép đồng dạng Si(O; 2; 90^0) với O là giao điểm thứ hai của các đường tròn (α) và (β) có đường kính theo thứ tự là AB và BC. (Hình 110).

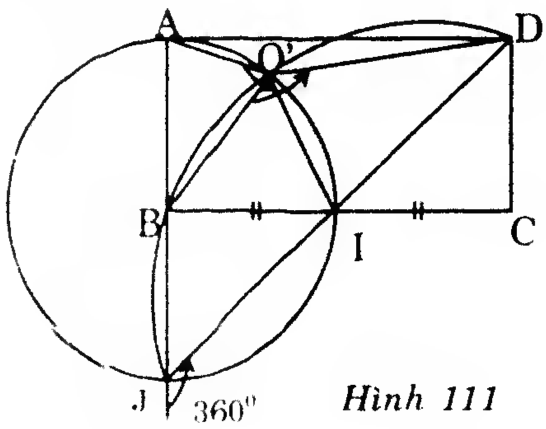


Hình 110

2. Ta có:

$$\begin{cases} ID = AB\sqrt{2} \\ (\vec{AB}; \vec{ID}) = 135^0 + m.360^0 \ (m \in Z) \end{cases}$$

Do đó $\vec{ID}$ là ảnh của $\vec{AB}$ trong phép đồng dạng Si(O'; $\sqrt{2}$; 135^0) với O' là giao điểm thứ hai của các đường tròn (γ) và (φ) ngoại tiếp các tam giác AIJ và BDJ, J là giao điểm của các đường thẳng AB và ID (Hình 111).



Hình 111

76. Cho B là ảnh của A trong phép đồng dạng Si(O; 2; 60^0). Hãy xác định vị trí của điểm O.

Hướng dẫn: Dựng tam giác đều ABC với $(\vec{CA}; \vec{CB}) = 60^0 + k.360^0$, ($k \in Z$).

Gọi I và J theo thứ tự là các điểm chia vectơ $\vec{AB}$ theo các tỉ số 2 và – 2.

Có nhận xét gì?

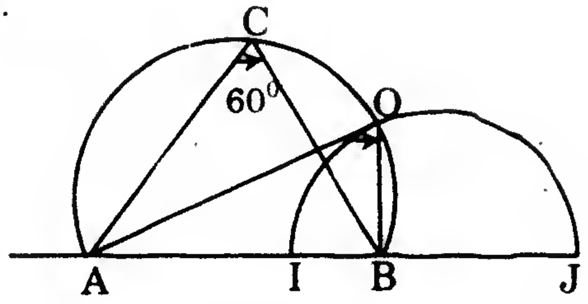
Giải

Dựng tam giác đều ABC với: $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = 60^0 + k.360^0$ $(k \in Z)$

$\Rightarrow (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) + k.360^0$.

Suy ra O nằm trên cung chứa góc định hướng 60^0 vẽ trên cạnh AB.

Gọi I và J theo thứ tự là các điểm chia vectơ $\overrightarrow{BA}$ theo các tỉ số 2 và −2 (Hình 112)



Hình 112

Ta có: $\dfrac{OB}{OA} = \dfrac{IB}{IA} = \dfrac{JB}{JA}$ (= 2).

Suy ra điểm O nằm trên đường tròn (α) đường kính IJ. (vì sao?).

Do đó O là giao điểm của cung ACB chứa góc 60^0 và đường tròn (α).

Biểu thức giải tích của phép đồng dạng (thuận) trong mặt phẳng

Trong mặt phẳng (Oxy), cho điểm cố định I(a; b) và một điểm M(x; y).

Gọi M'(x'; y') là ảnh của điểm M trong phép đồng dạng phẳng Si(I; k; θ).

Ta có tọa độ của M' là:

$$\begin{cases} x'' = x_I + k(x - x_I)\cos\theta - k(y - y_I)\sin\theta \\ y' = y_I + k(x - x_I)\sin\theta + k(y - y_I)\cos\theta \end{cases}$$

với k là một số thực dương và $-180^0 \le \theta \le 180^0$.

+ Nếu tâm I của phép đồng dạng trùng với điểm gốc O của hệ trục tọa độ, ta có:

$$\begin{cases} x' = k(\cos\theta - y\sin\theta) \\ y' = k(x\sin\theta + y\cos\theta) \end{cases}$$

77. 1. Trong phép đồng dạng Si(I; 3; 60^0) điểm M(−1; 3) có ảnh là điểm nào? Biết I(1; 5).

2. Điểm M có ảnh là điểm nào trong phép đồng dạng Si(O; 3; 60^0)?

Giải

1. Vận dụng công thức

$$\begin{cases} x' = x_I + k(x - x_I)\cos\theta - k(y - y_I)\sin\theta \\ y' = y_I + k(x - x_I)\sin\theta + k(y - y_I)\cos\theta \end{cases}$$

trong đó $M'(x'; y')$ là ảnh của điểm $M(x;y)$ cho bởi phép đồng dạng $S_I(I; k'; \theta)$.

Với $I(1; 5)$, $k = 3$ và $\theta = 60^0$, ta có:

$$\begin{cases} x' = 1 + 3(-1 - 1).\dfrac{1}{2} - 3(3 - 5).\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -2 + 3\sqrt{3} \\ y' = 5 + 3(-1 - 1).\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 3(3 - 5).\dfrac{1}{2} = 2 - 3\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy: $M'(-2 + 3\sqrt{3}\ ;\ 2 - 3\sqrt{3})$.

2. Trong phép đồng dạng $S_I(O; 3; 60^0)$, điểm $M(-1; 3)$ có ảnh là điểm $M_1(x_1; y_1)$ với:

$$\begin{cases} x_1 = 3\left(-\dfrac{1}{2} - 3.\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{3(1 + 3\sqrt{3})}{2} \\ y_1 = 3\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 3.\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3(3 - \sqrt{3})}{2} \end{cases}$$

Vậy: $M_1\left(-\dfrac{3(1 + 3\sqrt{3})}{2}; \dfrac{3(3 - \sqrt{3})}{2}\right)$

78. Trong mặt phẳng (Oxy), trên tia Ox lấy một điểm cố định A; trên tia Oy lấy một điểm cố định B và trên đoạn thẳng AB lấy một điểm M. Một đường thẳng Δ bất kì đi qua M cắt tia Ox tại C và tia Oy tại D.

Gọi I và J theo thứ tự là tâm các đường tròn (α) ngoại tiếp tam giác MAC và đường tròn (β) ngoại tiếp tam giác MBD.

Chứng minh rằng góc $\widehat{IMJ}$ là góc vuông.

Hướng dẫn: Gọi N là giao điểm thứ hai của các đường tròn (α) và (β).

Để ý phép đồng dạng tâm N có góc đồng dạng $\theta = 90^0$.

Giải

Các đường tròn (α) và (β) có chung nhau điểm M nên có chung nhau điểm thứ hai N.

Phép đồng dạng tâm N, góc đồng dạng $\theta = 90^0$ biến $\overline{AC}$ thành $\overline{BD}$ (Hình 113).

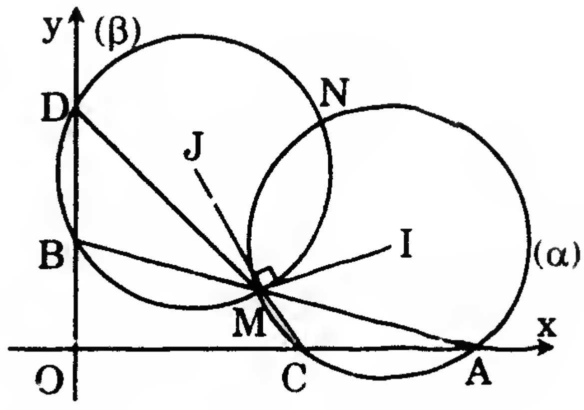
Do đó đường tròn (β) là ảnh của đường tròn (α) cho bởi phép đồng dạng trên.

$\Rightarrow \left(\overline{NI}; \overline{NJ}\right) = 90^0 + k360^0, k \in Z \Rightarrow \widehat{IMJ} = 90^0.$

* Chú ý: Ta có: $\widehat{IMJ} = 90^0 \Leftrightarrow IM \perp JM$.

Ta suy ra: IM và JM theo thứ tự là tiếp tuyến của các đường tròn (β) và (α) tại giao điểm M.

Trong toán học, tại điểm chung của hai đường cong (C_1) và (C_2) nếu các tiếp tuyến của (C_1) và (C_2) vuông góc với nhau thì hai đường cong (C_1) và (C_2) được gọi là trực giao với nhau.



Hình 113

Trong bài toán trên, hai đường tròn (α) và (β) là hai đường tròn trực giao.

79. Cho hai đường tròn (O; R) và O'; R') giao nhau tại A và B mà $\widehat{OAO'} = 90^0$.

Một cát tuyến di động Δ đi qua A cắt các đường tròn (O) và (O') theo thứ tự tại M và M'.

Gọi Mt và M't' là các tiếp tuyến tại M của (O) và tại M' của (O).

Chứng minh rằng Mt và M't' vuông góc nhau.

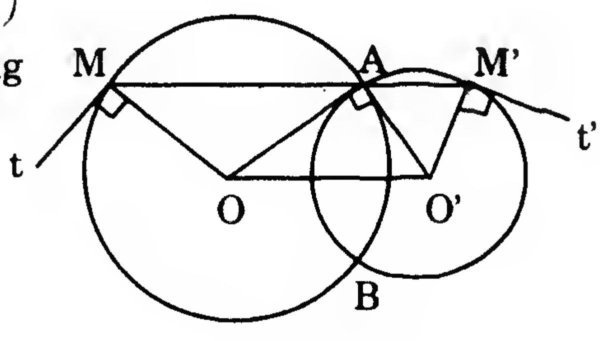
Hướng dẫn: Xét phép đồng dạng

$$Si\left(B; \frac{R'}{R}; 90^0\right). \text{ Giả sử } \left(\left(\overline{AO}; \overline{AO'}\right) = 90^0 + k.360^0, k \in Z.$$

Giải

Phép đồng dạng $S_i\left(B; \frac{R'}{R}; 90^0\right)$ biến đường tròn (O) thành đường tròn (O').

Trong phép đồng dạng trên, điểm M biến thành điểm M'; tiếp tuyến MT biến thành tiếp tuyến M't'.



Hình 114

(Mt; M't') = $90^0 + k.180^0$, k ∈ Z

Do đó ta có:

Mt ⊥ M't' (Hình 114).

80. Trên đường tròn (O; R), cho điểm cố định A và một điểm di động B. Dựng hình vuông ABCD sao cho $(AB; AD) > 0$.

Tìm tập hợp các điểm C và D.

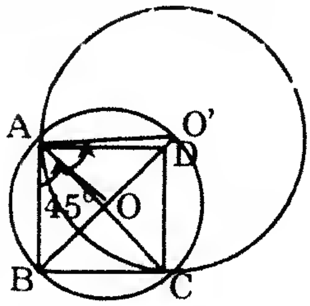
Giải

* Tập hợp các điểm C.

Ta có: $\begin{cases} AC = AB\sqrt{2} \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 45^0 + k.360^0, k \in Z. \end{cases}$

Suy ra C là ảnh của B trong phép đồng dạng $S_i(A; \sqrt{2}; 45^0)$.

Do đó khi B chạy trên đường tròn (O; R), ta có tập hợp các điểm C là đường tròn $(O'; R\sqrt{2})$, ảnh của đường tròn (O; R) cho bởi phép đồng dạng $Si(A; \sqrt{2}; 45^0)$, với O' là ảnh của O trong phép đồng dạng trên. (Hình 115).



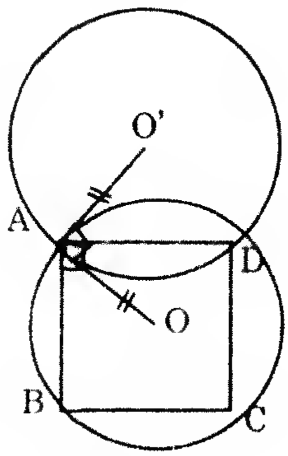
Hình 115

2. Tập hợp các điểm D. (Hình 116).

Ta có: $\begin{cases} AD = AB \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = 90^0 + k.360^0, k \in Z. \end{cases}$

Ta suy ra D là ảnh của B trong phép $R(A; 90^0)$.

Do đó khi B chạy trên đường tròn (O; R) thì tập hợp các điểm D là đường tròn (O"; R), ảnh của đường tròn (O; R) cho bởi phép quay $R(A, 90^0)$ với O" là ảnh của O trong phép quay trên.



Hình 116

81. Trong mặt phẳng (Oxy), lấy điểm A cố định trên tia Ox và điểm B cố định trên tia Oy. Trên đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng AB tại A, lấy một điểm di động M. Đường thẳng vuông góc với OM tại O cắt đường thẳng AB tại N.

Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn thẳng MN.

Hướng dẫn: Chứng minh các tam giác MON và AOB đồng dạng.

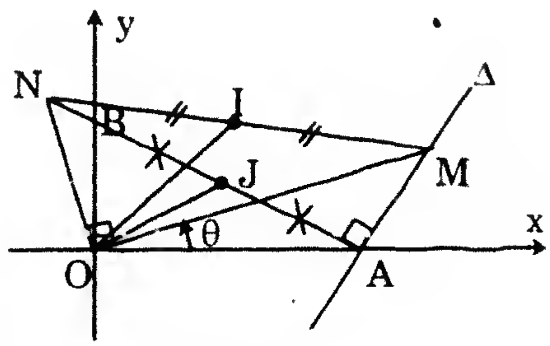
Giải

Ta có: $\Delta ONB \backsim \Delta OMA$

$\Rightarrow \Delta MON \backsim \Delta AOB$

Gọi J là trung điểm của đoạn thẳng AB. Ta suy ra:

$$\Delta OIM \backsim \Delta OJA.$$



Hình 117

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{OI}{OM} = \dfrac{OJ}{OA} = \dfrac{AB}{2OA} \\ (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OI}) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OJ}) = \theta \end{cases}$

Do đó I là ảnh của điểm M trong phép đồng dạng $Si\left(O; \dfrac{AB}{2OA}; \theta\right)$

Khi M chạy trên đường thẳng Δ thì tập hợp các điểm I là đường thẳng Δ', ảnh của đường thẳng Δ cho bởi phép đồng dạng trên. (hình 117).

82. Cho hai đường tròn: (C_1): $x^2 + y^2 - 4x = 0$

(C_2): $x^2 + y^2 - 2y = 0$

và M là một điểm di động trên (C_1).

Gọi I là giao điểm thứ hai của (C_1) và (C_2); IM cắt (C_2) tại điểm M'(x'; y').

1. M' là ảnh của điểm M trong phép biến hình nào?
2. Tìm tập hợp trung điểm J của đoạn MM'.

Giải

1. Đường tròn (C_1): $x^2 + y^2 - 4x = 0$ có tâm $C_1(2; 0)$, bán kính $R_1 = 2$.

Đường tròn (C_2): $x^2 + y^2 - 2y = 0$ có tâm $C_2(0; 1)$, bán kính $R_1 = 1$.

(C_1) tiếp xúc với trục tung tại O, (C_2) tiếp xúc với trục hoành tại O.

(C_1) và (C_2) có hai điểm chung là điểm O và điểm I. (Hình 118).

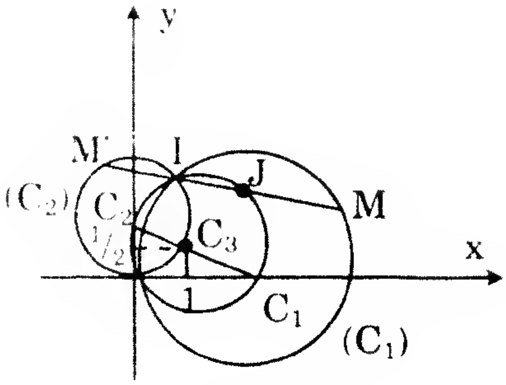
Ta có:

$$\begin{cases} OC_2 = \dfrac{1}{2}OC_1 \\ (\overrightarrow{OC_1}; \overrightarrow{OC_2}) = 90^0 + k.360^0,\ k \in Z. \end{cases}$$

Ta suy ra đường tròn (C_2) là ảnh của đường tròn (C_1) trong phép đồng dạng $Si\left(O; \dfrac{1}{2}; 90^0\right)$.

MM' qua I nên M' là ảnh của điểm M trong phép đồng dạng $Si\left(O; \frac{1}{2}; 90^0\right)$.

$$M \xrightarrow{Si\left(O; \frac{1}{2}; 90^0\right)} M'$$



Hình 118

2. Tọa độ của M':

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x\cos 90^0 - y\sin 90^0) = -\frac{y}{2} \\ y' = \frac{1}{2}(x\sin 90^0 + y\cos 90^0) = \frac{x}{2} \end{cases}$$

Suy ra tọa độ trung điểm J của đoạn MM'.

$$\begin{cases} x_J = \frac{x_M + x_{M'}}{2} = \frac{x - \frac{y}{2}}{2} = \frac{2x - y}{4} \\ y_J = \frac{y_M + y_{M'}}{2} = \frac{y + \frac{x}{2}}{2} = \frac{x + 2y}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8x_J + 4y_J}{5} \\ y = \frac{8y_J - 4x_J}{5} \end{cases}$$

Ta có: $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

$$\Leftrightarrow \frac{(8x_J + 4y_J)^2}{25} + \frac{(8y_J - 4x_J)^2}{25} - \frac{4(8x_J + 4y_J)}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_J^2 + y_J^2 - 2x_J - y_J = 0$$

Do đó tập hợp các điểm J là đường tròn

$$(C_3): x^2 + y^2 - 2x - y = 0$$

có tâm $C_3\left(1; \frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn C_1C_2.

Nhận xét rằng đường tròn (C_3) đi qua I.

83. Trong mặt phẳng (Oxy), cho A(2; 0) và điểm B(0; 2); Δ là đường thẳng vuông góc với AB tại B. Một đường tròn (α) di động tâm I đi qua A, B và cắt Oy tại M, Δ tại M'.

1. Xác định phép đồng dạng biến điểm M thành điểm M'.
2. So sánh các đoạn thẳng BM' và OM.

Giải

1. Tam giác OAB vuông cân tại O

$\Rightarrow \widehat{OBA} = 45^0$

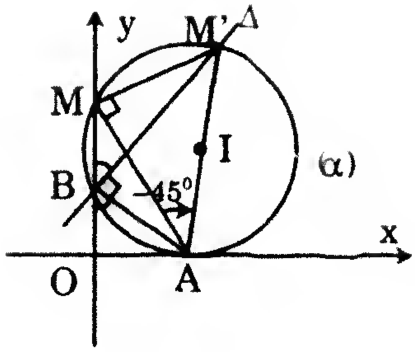
$\Rightarrow \widehat{MBM'} = 45^0$

$\Rightarrow \widehat{MAM'} = 45^0$

$\Rightarrow \Delta MAM'$ vuông cân tại M (Hình 119)

$\Rightarrow AM = R\sqrt{2}$ với R là bán kính đường tròn (α).

$\Rightarrow AM = \dfrac{AM'}{2}.\sqrt{2} \Leftrightarrow AM' = AM\sqrt{2}$.



Hình 119

Ta có: $\begin{cases} AM' = AM\sqrt{2} \\ \left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}\right) = -45^0 + k.360^0, k \in Z. \end{cases}$

Do đó M' là ảnh của điểm M trong phép đồng dạng Si(A; $\sqrt{2}$;-45^0).

$$M \xmapsto{Si(A;\sqrt{2};45^0)} M'$$

2. Phép đồng dạng Si(A; $\sqrt{2}$; -45^0) biến: $O \longrightarrow B$

$M \longrightarrow M'$

$OM \longrightarrow BM'$.

Do đó ta có: $BM' = OM\sqrt{2}$.

84. 1. Trong mặt phẳng (Oxy), cho hai điểm A(1; 0) và B(3; 0) với B là ảnh của A trong một phép đồng dạng tâm I và có tỉ số đồng dạng $k = \sqrt{3}$.

Hãy tìm tập hợp (T) các tâm đồng dạng.

2. Xét trường hợp A(0; 1) và B(0; 3).

Giải

Gọi I(x; y) là tâm của phép đồng dạng đã cho.

Theo giả thiết, ta có: $IB = \sqrt{3}.IA$.

1. Ta có: $\overrightarrow{IB} = (3 - x; -y)$

$\overrightarrow{IA} = (1 - x; -y)$

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{(3 - x)^2 + y^2} = \sqrt{3}.\sqrt{(1 - x)^2 + y^2}$

$\Leftrightarrow (3 - x)^2 + y^2 = 3[(1 - x)^2 + y^2]$

$\Leftrightarrow 9 - 6x + x^2 + y^2 = 3(1 - 2x + x^2 + y^2)$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3$.

Tập hợp (T) tâm đồng dạng là đường tròn (O) tâm O, bán kính $R = \sqrt{3}$.

2. Học sinh tự giải.

***85.** Cho $\widehat{xOy} = 45^0$ sao cho $(Ox; Oy) > 0$. Trên tia Ox, lấy đoạn AB = 2a; trên tia Oy lấy đoạn CD = 4a. A nằm giữa O và B; C nằm giữa O và D.

Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của AB và CD; E và F cố định khi a thay đổi.

1. Xác định phép đồng dạng Si(I; k; θ) biến $\overrightarrow{AB}$ thành $\overrightarrow{CD}$.
2. Xác định phép đồng dạng Si(J; k'; θ') biến $\overrightarrow{AB}$ thành $\overrightarrow{DC}$.
3. Chứng tỏ rằng khi a thay đổi, hai điểm I và J nằm trên một đường cố định (L).

Giải

1. Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} CD = 2AB \\ \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}\right) = 45^0 + m.360^0, m \in Z. \end{cases}$$

Do đó $\overrightarrow{CD}$ là ảnh của $\overrightarrow{AB}$ trong một phép đồng dạng tâm I, có tỉ số đồng dạng k = 2 và góc đồng dạng $\theta = 45^0$.

Tâm đồng dạng I là giao điểm thứ hai của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAC và OBD.

2. Ta có:

$$\begin{cases} CD = 2AB \\ \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{DC}\right) = -135^0 + m.360^0, m \in Z. \end{cases}$$

Do đó $\overrightarrow{DC}$ là ảnh của $\overrightarrow{AB}$ trong một phép đồng dạng tâm J, có tỉ số đồng dạng k'= 2 và góc đồng dạng $\theta = -135^0$ (Học sinh tự vẽ hình).

Tâm đồng dạng J là giao điểm thứ hai của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAD và OBC.

3. Trong các phép đồng dạng trên, trung điểm E của đoạn AB biến thành trung điểm F của đoạn CD.

Do đó I và J đều nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔOEF.

Vậy: Khi a thay đổi, hai điểm I và J luôn luôn nằm trên một đường tròn cố định.

86. Cho một đường thẳng cố định D và một cố định I nằm ngoài đường thẳng D, M là một điểm di động trên D. Dựng tam giác vuông cân MIN đỉnh M với $\left(\overrightarrow{IM}; \overrightarrow{IN}\right) > 0$.

1. Tìm tập hợp (T) các điểm N.

2. Tìm tập hợp (E) các trọng tâm G của tam giác MIN khi M di động trên đường thẳng D.

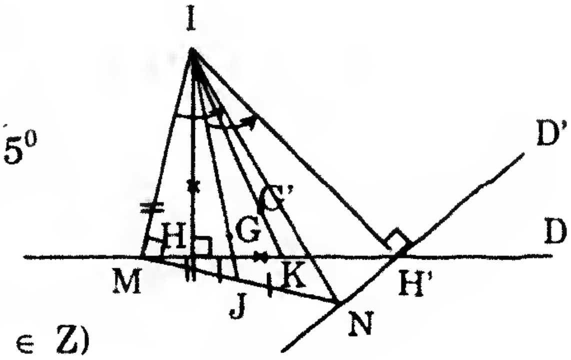
Giải

1. ΔMIN vuông cân tại M.

Suy ra: $IN = IM\sqrt{2}$ và $\widehat{MIN} = 45^0$

Ta có:

$$\begin{cases} IN = IM\sqrt{2} \\ \left(\overrightarrow{IM};\ \overrightarrow{IN}\right) = 45^0 + m.360^0\ (m \in Z) \end{cases}$$



Hình 120

Ta suy ra:

N là ảnh của điểm M trong phép đồng dạng Si(I; $\sqrt{2}$; 45^0)

Do đó khi M chạy trên đường thẳng D thì tập hợp (T) các điểm N là đường thẳng D', ảnh của đường thẳng D cho bởi phép đồng dạng Si(I; $\sqrt{2}$; 45^0).

(Dựng IH $\perp$ D tại H và dựng tam giác HIH' vuông cân tại H, H' $\in$ D. Kẻ đường thẳng D' vuông góc với IH' tại H', D' là ảnh của D. Dĩ nhiên D' đi qua N). (Hình 120).

2. Gọi J là trung điểm của MN và $\widehat{MIJ} = \alpha$.

Ta có: • $\tan\alpha = \dfrac{MJ}{IM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha$ không đổi với $O < \alpha < 90^0$.

$$\bullet\ IJ^2 = IM^2 + MJ^2 = \frac{5IM^2}{4} \Rightarrow IJ = \frac{IM\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow IG = \frac{2}{3}IJ = \frac{IM\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \begin{cases} IG = \dfrac{\sqrt{5}}{3}.IM \\ \left(\overrightarrow{IM};\ \overrightarrow{IG}\right) = \alpha \end{cases}$$

Ta suy ra G là ảnh của điểm M trong phép đồng dạng Si$\left(I;\ \dfrac{\sqrt{5}}{3};\ \alpha\right)$.

Do đó khi M chạy trên đường D thì tập hợp (E) các điểm G là đường thẳng D", ảnh của đường thẳng D cho bởi phép đồng dạng Si$\left(I;\ \dfrac{\sqrt{5}}{3};\ \alpha\right)$.

Gọi G' là trọng tâm ΔHIH'. Kẻ D" $\perp$ OG' tại G').

87. Cho một điểm cố định P và một đường tròn di động (O).

Qua P, kẻ các tiếp tuyến PT, PT' với đường tròn (O). Tìm tập hợp các điểm T, T'.

1. Khi O di động trên đường thẳng cố định Δ.
2. Khi O di động trên đường tròn cố định (I; R).

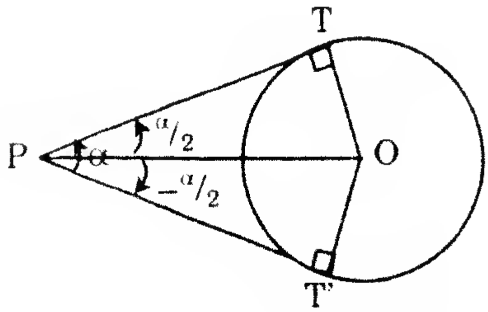
Biết rằng góc $\widehat{TPT'} = \alpha$ không đổi.

Hướng dẫn: Cần nhớ rằng PO là phân giác của góc TPT'. Để ý phép đồng dạng tâm A, góc đồng dạng $\theta = \pm\frac{\alpha}{2}$.

Giải

Giả sử $(\vec{PT'}; \vec{PT}) = \alpha + k.360^\circ$ với $k \in Z$.

$\Rightarrow (\vec{PO}; \vec{PT}) = \frac{\alpha}{2} + m.360^\circ$ với $m \in Z$.



Hình 121

ΔTPO vuông tại T $\Rightarrow \frac{PT}{PO} = \cos\frac{\alpha}{2} > 0$

Do đó T là ảnh của điểm O trong phép đồng dạng $Si\left(P; \cos\frac{\alpha}{2}; \frac{\alpha}{2}\right)$.

1. Khi O di động trên đường thẳng Δ thì tập hợp các điểm T là đường thẳng Δ', ảnh của đường thẳng Δ cho bởi phép đồng dạng $Si\left(P; \cos\frac{\alpha}{2}; \frac{\alpha}{2}\right)$ (Hình 121)

2. Khi O di động trên đường tròn (I; R) thì tập hợp các điểm T là đường tròn (I'; R'), ảnh của đường tròn (I; R) cho bởi phép đồng dạng $Si\left(P; \cos\frac{\alpha}{2}; \frac{\alpha}{2}\right)$ với I' là ảnh của I trong phép đồng dạng trên và $R' = R\cos\frac{\alpha}{2}$.

   * Tập hợp các điểm T': Học sinh tự giải.

***88.** Cho một đường thẳng cố định Δ và một điểm cố định A có khoảng cách đến Δ một đoạn d; M là một điểm di động trên đường thẳng Δ.

1. Tìm tập hợp các điểm P và P' được xác định như sau:

a) $\begin{cases} MP = kMA \\ (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MP}) = -90^0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} MP' = \dfrac{1}{k}MA \\ (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MP'}) = 90^0 \end{cases}$

với k là một số thực dương cho trước.

2. Chứng minh rằng đường tròn (α) ngoại tiếp tam giác APP' luôn luôn đi qua một điểm cố định B khác A.
3. Tìm tập hợp các điểm B khi k thay đổi, A cố định.
4. Giả sử A di động trên một đường thẳng cố định D không song song với Δ và k > 0 không đổi.

Tìm tập hợp các điểm B.

Hướng dẫn: Từ giả thiết, ta suy ra được điều gì?

- 3 điểm P, M, P' thẳng hàng.
- ΔADD' có gì đặc biệt?
- $AM^2 = AP.AP' \Leftrightarrow \Delta APP'$?

Giải

Từ giả thiết, ta suy ra 3 điểm P, M, P' thẳng hàng và M nằm giữa P, P'.

Ta lại có: $AM^2 = AP.AP'$

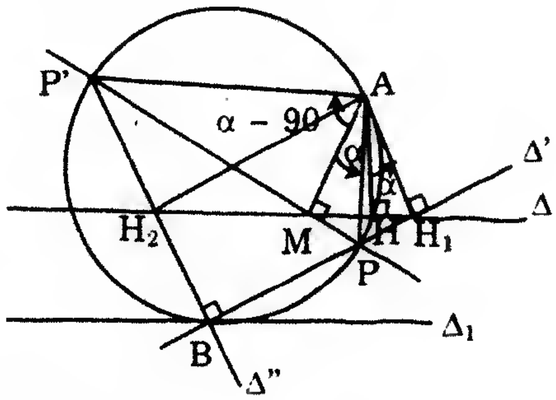
$AM \perp PP'$

Suy ra ΔAPP' vuông tại A.

Đặt $\widehat{MAP} = \alpha$

$\Rightarrow \dfrac{MP}{MA} = \tan\alpha$

$\Rightarrow tg\alpha = k \Rightarrow \alpha$ không đổi.



Hình 122

Giả sử: $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AP}) = \alpha + k.360^0$, $k \in Z$

Ta có: $\begin{cases} AP = \dfrac{1}{\cos\alpha}.AM \\ (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AP}) = \alpha + k.360, \ k \in Z. \end{cases}$

Ta suy ra P là ảnh của điểm M trong phép đồng dạng $Si\left(A; \dfrac{1}{\cos\alpha}; \alpha\right)$.

Do đó khi điểm M di động trên đường thẳng Δ thì tập hợp các điểm P là đường thẳng Δ', ảnh của đường thẳng Δ cho bởi phép đồng dạng $Si\left(A; \dfrac{1}{\cos\alpha}; \alpha\right)$ (Hình 122).

Tương tự: Tập hợp các điểm P' là đường thẳng Δ'', ảnh của đường thẳng Δ cho bởi phép đồng dạng $Si\left(A; \frac{1}{\sin\alpha}; \alpha - 90^0\right)$.

2. Gọi B là giao điểm của Δ' và Δ''. B cố định và $\Delta' \perp \Delta''$.

Tứ giác APBP' nội tiếp đường tròn đường kính PP'.

Vậy: Đường tròn (α) đi qua điểm cố định B khác A.

3. Gọi H_1 và H_2 theo thứ tự là ảnh của điểm H ($AH \perp \Delta$ tại H) trong các phép đồng dạng $Si\left(A; \frac{1}{\cos\alpha}; \alpha\right)$ và $Si\left(A; \frac{1}{\sin\alpha}; \alpha - 90^0\right)$

Suy ra: H_1 và H_2 theo thứ tự là giao điểm của Δ với Δ' và Δ''.

Ta có: $AH_1 \perp \Delta'$; $AH_2 \perp \Delta''$

Ta suy ra tứ giác AH_1BH_2 là một hình chữ nhật.

Gọi I là giao điểm của AB và H_1H_2.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.

A cố định, k thay đổi, Δ' và Δ'' thay đổi, B là ảnh của I trong phép vị tự H(A; 2).

Khi M di động trên Δ, I cũng di động trên Δ, tập hợp các điểm B sẽ là đường thẳng Δ_1, ảnh của đường thẳng Δ cho bởi phép vị tự H(A; 2).

Gọi H' là ảnh của H trong phép vị tự H(A; 2):

$\overrightarrow{AH'} = 2\overrightarrow{AH}$.

Δ_1 đi qua H' và song song với Δ; Δ_1 cách Δ một đoạn bằng d, nằm khác phía với điểm A đối với Δ.

4. Nhận xét rằng ứng với mỗi vị trí của điểm A và một trị số dương không đổi k, ta luôn luôn dựng được hình chữ nhật AH_1BH_2 với $H_1, H_2 \in \Delta$ và do đó $I \in \Delta$.

Ta lại có: $\widehat{HAH_1} = \widehat{AH_2H_1} = \alpha$ nên nếu k không đổi thì α cũng không đổi.

Do đó hình chữ nhật AH_1BH_2 luôn luôn đồng dạng với chính nó. Ta suy ra AB có phương không đổi.

Gọi C là giao điểm của Δ và D.

Từ C dựng đường thẳng D' song song với phương AB, D' cố định.

Chùm 4 đường thẳng D, CB, Δ, D' là một chùm điều hòa. Do đó CB cố định. Tập hợp các điểm B là đường thẳng Δ_2, liên hợp của D đối với Δ và D'.

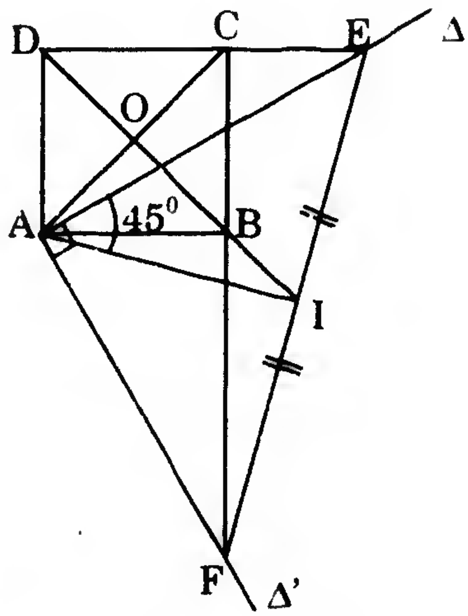
89. Cho hình vuông ABCD. Một đường thẳng Δ đi qua A cắt đường thẳng CD ở E. Đường thẳng Δ' đi qua A vuông góc với Δ cắt đường thẳng BC ở F.

Tìm tập hợp (T) trung điểm I của đoạn thẳng EF.

Hướng dẫn: Để ý phép quay $R(A; 90^0)$ và phép đồng dạng $Si\left(A; \frac{\sqrt{2}}{2}; 45^0\right)$.

Giải

Ta có: $\left(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right) = \left(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AF}\right) = 90^0$



Hình 123

Phép quay $R(A, 90^0)$ biến các đường thẳng AD và AE theo thứ tự thành các đường thẳng AB và AF mà AD = AB nên ta có:

AE = AF (Hình 123)

$\Rightarrow \Delta AEF$ vuông cân tại A.

$$\Rightarrow AI = \frac{EF}{2} = \frac{AE\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{AI}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Chúng ta có thể xem ΔAEF đồng dạng với chính nó.

Ta có: $\begin{cases} AI = \dfrac{\sqrt{2}}{2}AE \\ \left(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AI}\right) = 45^0 \end{cases}$

Ta suy ra I là ảnh của E trong phép đồng dạng $Si\left(A; \frac{\sqrt{2}}{2}; 45^0\right)$ có tâm đồng dạng là điểm A, tỉ số đồng dạng $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$, góc đồng dạng $\theta = 45^0$.

Khi E chạy trên đường thẳng CD thì I chạy trên ảnh của đường thẳng CD cho bởi phép đồng dạng $Si\left(A; \frac{\sqrt{2}}{2}; 45^0\right)$.

Khi $E \equiv D$ thì $F \equiv B \Rightarrow I \equiv O$, O là tâm của hình vuông ABCD.

Khi E ≡ C thì I ≡ B

Suy ra I chạy trên đường thẳng OB. Chú ý rằng đường thẳng OB đi qua D.

Do đó tập hợp (T) các điểm I là đường thẳng BD.

90. Dựng tam giác ABC vuông cân tại A sao cho A và B nằm trên hai đường thẳng song song D_1 và D_2 cho trước; C cho trước.

Hướng dẫn: Có thể giả sử rằng $(AB; AC) > 0$.

Suy ra: $(CA; CB) = ?$, $CB = ?\ CA$.

Để ý phép đồng dạng $S(C; \sqrt{2}; 45^0) > 0$

Giải

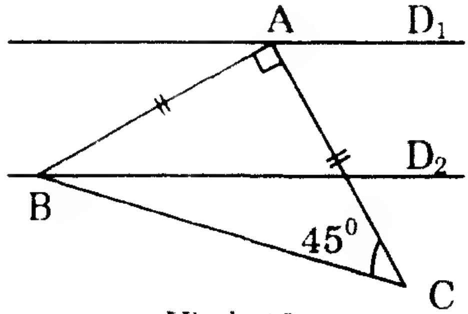
Giả sử ta đã dựng được tam giác ABC vuông cân tại A (Hình 124)

$\widehat{BAC} = 90^0$

$AB = AC$

Có thể giả sử

$(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = 45^0$



Hình 124

Ta có: $\begin{cases} (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = 45^0 \\ CB = CA\sqrt{2} \end{cases}$

Suy ra B là ảnh của A trong phép đồng dạng $Si(C; \sqrt{2}; 45^0)$.

Gọi D'_1 là ảnh của D_1 cho bởi phép đồng dạng $Si(C; \sqrt{2}; 45^0)$.

Ta suy ra D'_1 đi qua B (Hình 124).

Do đó ta có cách dựng ΔABC như sau:

+ Dựng D'_1 là ảnh của D_1 cho bởi phép đồng dạng $Si(C; \sqrt{2}; 45^0)$, D'_1 cắt D_2 tại B.

+ Dựng phép đồng dạng $Si\left(C; \frac{\sqrt{2}}{2}; -45^0\right)$ biến điểm B thành điểm A, dĩ nhiên $A \in D_1$.

ΔABC là tam giác phải dựng.

Thật vậy:

Ta có: $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = 45^0$; $(D'_1; D_2) = 45^0 + k.180^0$.

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 45^0$

Ta lại có: $CA = \frac{CB\sqrt{2}}{2}$.

Do đó ΔABC vuông cân tại A.

+ Ta luôn luôn dựng được hai tam giác thỏa yêu cầu của bài toán.

91. Cho hai đường tròn (I; R) và (I'; R'). Lấy điểm M thuộc đường tròn (I) và điểm M' thuộc đường tròn (I') sao cho:

$$\left(\overrightarrow{IM}; \overrightarrow{I'M'}\right) = \theta\ [360^0]$$

θ là một góc cho trước.

1. Xác định tâm đồng dạng O biến đường tròn (I) thành đường trın (I').
2. Gọi K là giao điểm của các đường thẳng IM và I'M'.

   Chứng minh rằng đường tròn (α) ngoại tiếp $\Delta KMM'$ luôn lôn đi qua một điểm cố định.

Giải

1. Xem bài 74.
2. Đường tròn (I'; R') là ảnh của đường tròn (I; R) cho bởi phép đồng dạng

$$Si\left(O; \frac{R'}{R}; \theta\right)$$

Ta lại có: • M' $\in$ (I'), M $\in$ (I)

• I' là ảnh của I

• $\left(\overrightarrow{I'M'}; \overrightarrow{IM}\right) = \theta\ [360^0]$

Suy ra: $\overrightarrow{I'M'}$ là ảnh của $\overrightarrow{IM}$ trong phép đồng dạng $Si\left(O; \frac{R}{R'}; \theta\right)$

Do đó đường tròn (α) đi qua O.

Học sinh tự vẽ hình.

92. Trong mặt phẳng (Oxy) lấy hai điểm A và M thuộc trục Ox, hai điểm B và N thuộc trục Oy; A và B cố định, M và N di động sao cho:

$$\overline{AM} = k\overline{BN}$$

k là một số thực dương cho trước.

1. Xác định phép đồng dạng biến $\overrightarrow{AM}$ thành $\overrightarrow{BN}$.
2. Chứng minh đường tròn (α) ngoại tiếp ΔOMN đi qua một điểm cố định khác O.

   Hướng dẫn: Xem bài 88. Học sinh tự giải.

93. Cho tam giác ABC (AB: AC) > 0, có các trung tuyến AM, BN, CP.

Về phía ngoài tam giác ABC, dựng các tam giác vuông cân DBC, ECA, FAB có đáy theo thứ tự là các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC.

1. Tìm ảnh của vectơ $\overrightarrow{ME}$ trong tích của các phép đồng dạng $Si(C; \sqrt{2}; 45^0)$ và $Si\left(B; \frac{\sqrt{2}}{2}; 45^0\right)$.

2. Chứng tỏ rằng các đường thẳng AD, BE, CF đồng qui.

Hướng dẫn:

1. Nhắc lại rằng tích số của hai phép đồng dạng $Si(I; k_1; \theta_1)$ và $Si(J; k_2; \theta_2)$ là phép đồng dạng $Si(0; k_1 + k_2; \theta_1 + \theta_2)$.
2. Chứng minh AD, BE, CF là 3 đường cao của ΔDEF.

Giải

Trong phép đồng dạng $Si(C; \sqrt{2}; 45^0)$, ảnh của vectơ $\overrightarrow{ME}$ là vectơ $\overrightarrow{DA}$.

Trong phép phép đồng dạng $Si\left(B; \frac{\sqrt{2}}{2}; 45^0\right)$, ảnh của vectơ $\overrightarrow{DA}$ là vectơ $\overrightarrow{MF}$.

Do đó tích số của các phép đồng dạng $Si(C; \sqrt{2}; 45^0) \times Si\left(B; \frac{\sqrt{2}}{2}; 45^0\right)$ đã biến vectơ $\overrightarrow{ME}$ thành vectơ $\overrightarrow{MF}$ (Hình 125).

Ta suy ra tích số của hai phép đồng dạng đã cho là phép đồng dạng $Si(M; k; \theta)$ với:

$$k = k_1k_2 = \sqrt{2} . \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

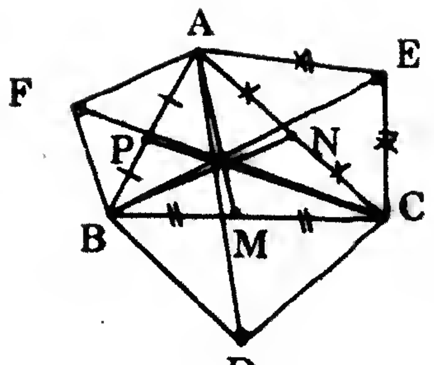
$$\theta = 45^0 + 45^0 = 90^0$$

$$\overrightarrow{ME} \xrightarrow{Si(M; 1; 90^0)} \overrightarrow{MF}.$$

hay phép đồng dạng tích trên chính là phép quay $R(M; 90^0)$ tâm M, có góc quay $\theta = 90^0$.

Suy ra: $ME = MF$; $ME \perp MF$.

2. Học sinh tự giải



Hình 125

94. Về phía ngoài tam giác ABC, $(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}) > 0$, dựng các tam giác đều A'BC, B'CA, C'AB có trọng tâm theo thứ tự là G_1, G_2, G_3.

1. Tìm ảnh của vectơ $\overrightarrow{G_1G_2}$ trong tích của các phép đồng dạng $Si(C;\ \sqrt{3}\ ;\ 30^0)$ và $Si\left(B;\ \dfrac{\sqrt{3}}{3};\ 30^0\right)$.

2. Xác định tính chất của tam giác $G_1G_2G_3$.

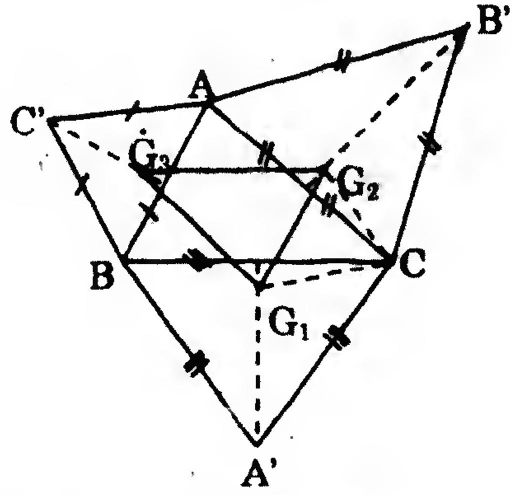
Giải

Trong phép đồng dạng $Si(C;\ \sqrt{3}\ ;\ 30^0)$, vectơ $\overrightarrow{G_1G_2}$ có ảnh là vectơ $\overrightarrow{A'A}$ (Vì sao?).

Trong phép đồng dạng $Si\left(B;\ \dfrac{\sqrt{3}}{3};\ 30^0\right)$, vectơ $\overrightarrow{A'A}$ có ảnh là vectơ $\overrightarrow{G_1G_3}$.

Do đó trong phép đồng dạng tích, vectơ $\overrightarrow{G_1G_3}$ là ảnh của vectơ $\overrightarrow{G_1G_2}$ (Hình 126).

Ta suy ra tích của hai phép đồng dạng trên chính là phép quay $\mathcal{R}$ $(G_1;\ 60^0)$.



2. Tính chất của $\Delta G_1G_2G_3$: Học sinh tự giải.

Hình 126

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Trong mặt phẳng (Oxy), cho $\vec{v} = (a; b)$ và điểm M(x; y).

Xác định điểm M'(x'; y'), ảnh của điểm M trong phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{v})$.

A. ☐ $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y - b \end{cases}$ B. ☐ $\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y + b \end{cases}$

C. ☐ $\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$ D. ☐ $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

2. Trong mặt phẳng (Oxy), phép biến hình f biến M(x; y) thành điểm M'(x'; y') thỏa: $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}$

Hỏi f là phép dời hình nào?

Đáp số

A. ☐ f là một phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (-1; 2)$.

B. ☐ f là một phép vị tự tâm I(–1; 2) có tỉ số k = 1.

C. ☐ f là một phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (1; -2)$.

D. ☐ f là một phép vị tự tâm I(1; 2) có tỉ số k = 1.

3. Trong mặt phẳng (Oxy), cho $\vec{v} = (3; 1)$ và điểm A(1; 2).

Gọi A'(x; y) là ảnh của điểm A cho bởi phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{v})$. Hãy xác định điểm A'.

Đáp số

A. ☐ A'(2; –1) B. ☐ $A'\left(2; \frac{3}{2}\right)$

C. ☐ A'(4; 3) D. ☐ $A'\left(1; -\frac{1}{2}\right)$

4. Trong mặt phẳng (Oxy), cho $\vec{v} = (-4; -2)$ và điểm B(–2; –3) là ảnh của điểm A(x; y) trong phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{v})$. Hãy xác định điểm A.

Đáp số

A. ☐ A(2; –1) B. ☐ (–2; 1)

C. ☐ $A\left(-3; -\frac{5}{2}\right)$ D. Các đáp số trên đều sai.

5. Trong mặt phẳng (Oxy), cho hai điểm A và B với A(1; 3), B(2; 5).

Hãy tìm tọa độ của vectơ $\vec{v}$ sao cho B là ảnh của A cho bởi phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{v})$.

Đáp số

A. ☐ $\vec{v} = (-1; -2)$ B. ☐ $\vec{v} = \left(\frac{3}{2}; 4\right)$

C. ☐ $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ D. ☐ Một $\vec{v}$ khác.

6. Trong mặt phẳng (Oxy), cho ba điểm A(1; 2), B(2; 3), C(4; 1).

Hãy xác định điểm D(x; y) sao cho:

1. Tứ giác ABCD là một hình bình hành.
2. Tứ giác ADBC là một hình bình hành.

Đáp số

1) A. ☐ D(3; –1) B. ☐ D(3; 0)

C. ☐ D(3; 1) D. ☐ Các đáp số trên đều sai.

2) A. ☐ D(1; –4) B. ☐ D(1; 4)

C. ☐ D(–1; 4) D. ☐ Một điểm D khác.

7. Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường tròn (O; R) và đường tròn (O'; R). Đường tròn (O'; R) là ảnh của đường tròn (O; R) trong phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{v})$ nếu ta có:

A. ☐ $\vec{v} = \overrightarrow{O'O}$ B. ☐ $\vec{v} = 2\overrightarrow{OO'}$

C. ☐ $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OO'}$ D. ☐ Các đáp số trên đều sai.

8. Trong mặt phẳng (Oxy), cho hai điểm: A(1; 3), B(4; 3).

Dựng hình vuông ABCD. Biết rằng $y_C < y_B$, hãy xác định hai điểm C và D.

Đáp số

A. ☐ C(4; 0), D(2; 0) B. ☐ C(0; 4), D(1; 0)

C. ☐ C(4; 0), D(1; 0) D. ☐ C(0; 4), D(0; 1)

9. Trong mặt phẳng (Oxy), cho $\vec{v} = (a; b)$ và một số thực $m \neq 0$.

Phép tịnh tiến $\mathcal{T}(m\vec{v})$ biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') thỏa hệ thức nào?

Đáp số

A. ☐ $\begin{cases} x' = x + ma \\ y' = y - mb \end{cases}$ B. ☐ $\begin{cases} x' = x - ma \\ y' = y + mb \end{cases}$

C. ☐ $\begin{cases} x' = x + ma \\ y' = y + mb \end{cases}$ D. ☐ $\begin{cases} x' = x - ma \\ y' = y - mb \end{cases}$

10. Trong mặt phẳng (Oxy), cho hai điểm M(x; y) và M'(x'; y') có các tọa độ thỏa:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b, \text{ với } 0 \le \alpha < 2\pi \end{cases}$$

Cho phép biến hình f biến điểm M thành điểm M'.

Hãy xác định α để f là một phép tịnh tiến.

Đáp số

A. ☐ $\alpha = \frac{\pi}{6}$ B. ☐ $\alpha = \frac{\pi}{4}$

C. ☐ $\alpha = 0$ D. ☐ $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

11. Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường thẳng D: y = 3x.

Xác định trị số của tham số m để phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{v})$ với $\vec{v} = (m^2 + 2m + 3; 4m^2 + m + 3)$ biến đường thẳng D thành chính nó.

Đáp số

A. ☐ $m = -1 \vee m = -6$ B. ☐ $m = 1 \vee m = 6$

C. ☐ $m = -1 \vee m = 6$ D. ☐ $m = 1 \vee m = -6$.

12. Trong mặt phẳng (Oxy), phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (m + 1; m)$ biến đường thẳng D: 2x + y – 4 = 0 thành chính nó.

Hãy xác định giá trị của m.

Đáp số

A. ☐ m = –1 B. ☐ m = 0

C. ☐ m = 1 D. ☐ Một trị số khác.

13. Trong mặt phẳng (Oxy), phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{a})$ theo vectơ $\vec{a} = (m^2 - m - 3; m - 1)$ biến đường thẳng D: mx – 2y + 1 = 0 thành chính nó.

Hãy xác định m.

Đáp số

A. ☐ $m = 0 \vee m = 2$

B. ☐ $m = -1 \vee m = 2$

C. ☐ $m = -1 \vee m = 0$

D. ☐ Các câu trả lời trên đều sai.

14. Trong mặt phẳng (Oxy), cho $\vec{v} = (1; 2)$. Cho phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{v})$.

1) Tìm ảnh D' của đường thẳng D: $x + y - 2 = 0$.

2) Tìm ảnh (C') của đường tròn (C)

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0.$$

Đáp số

1) A. ☐ D': $x + y + 5 = 0$

B. ☐ D': $x - y + 5 = 0$

C. ☐ D': $x + y - 5 = 0$

D. ☐ D': $x - y - 5 = 0$.

2) A. ☐ (C'): $x^2 + y^2 - 9 = 0$

B. ☐ (C'): $x^2 + y^2 - 6x = 0$

C. ☐ (C'): $x^2 + y^2 - 6y = 0$

D. ☐ Một đáp số khác.

15. Trong mặt phẳng (Oxy), cho hai đường tròn:

(α): $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

(β): $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$.

Phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{v})$ biến (α) thành (β), biến điểm A(4; 1) thành điểm A'. Hãy xác định A'.

Đáp số

A. ☐ A'(6; 3) B. ☐ A'(6; 2)

C. ☐ A'(6; 1) D. ☐ A'(6; 0).

16. Cho hai đường tròn (I) và (I') tương ứng nhau trong phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{v})$. Một đường thẳng D đi qua một giao điểm của (I) và (I'), song song với giá của $\vec{v}$, cắt (I) và (I') theo thứ tự tại A(−1; −1) và B(3; −3).

Tìm các tọa độ của $\vec{v}$.

Đáp số

A. ☐ $\vec{v} = (1; -2)$ B. ☐ $\vec{v} = (2; -4)$

C. ☐ $\vec{v} = (2; -1)$ D. ☐ $\vec{v} = (-2; 1)$.

17. Trong mặt phẳng (Oxy), cho vectơ v có giá song song với đường thẳng D: $x + y + 6 = 0$.

Phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{v})$ biến đường thẳng Δ: $2x - y + 3 = 0$ thành đường thẳng Δ': $2x - y - 3 = 0$. Hãy tìm các tọa độ của $\vec{v}$.

Đáp số

A. ☐ $\vec{v} = (2; 2)$ B. ☐ $\vec{v} = (-2; -2)$

C. ☐ $\vec{v} = (-2; 2)$ D. ☐ Một đáp số khác.

18. Trong mặt phẳng (Oxy), cho điểm A(1; –2).

1) Tìm ảnh A' của A trong phép đối xứng S(O) qua tâm O.

2) Tìm ảnh A" của A trong phép đối xứng S(I) qua tâm I(2; 1).

Đáp số

1) A. ☐ A'(1; 1) B. ☐ A'(1; 2)

C. ☐ A' (–1; 2) D. ☐ A'(–1; –2).

2) A. ☐ A"(–3; 4) B. ☐ A"(3; –4)

C. ☐ A"(4; 3) D. ☐ A"(3; 4).

19. Trong mặt phẳng (Oxy), cho điểm A(–1; –2).

1) Tìm ảnh B của A trong phép đối xứng S(Ox) qua trục hoành Ox.

2) Tìm ảnh C của A trong phép đối xứng S(Oy) qua trục tung Oy.

Đáp số

1) A. ☐ B(–1; 2) B. ☐ B(1; –2)

C. ☐ (1; 2) D. ☐ Một điểm khác.

2) A. ☐ C(–1; 2) B. ☐ C(1; –2)

C. ☐ C(1; 2) D. ☐ Một điểm khác.

20. Trong mặt phẳng (Oxy), cho điểm A(1;2).

1) Tìm ảnh P của A trong phép đối xứng S(D) qua đường thẳng D: $y = x$.

2) Tìm ảnh Q của A trong phép đối xứng S(Δ) qua đường thẳng Δ: $y = -x$.

Đáp số

1) A. ☐ P(1; 1) B. ☐ P(2; 2)

C. ☐ P(2; 1) D. ☐ P(–1; –2).

2) A. ☐ Q(–2; 1) B. ☐ Q(–2; –1)

C. ☐ Q(1; –2) D. ☐ Một điểm khác.

21. Trong mặt phẳng (Oxy), cho điểm M(–2; 9) và đường thẳng D: $2x - 3y + 18 = 0$.

1) Xác định điểm H, hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng D.

2) Xác định điểm M'(x'; y') ảnh của điểm M trong phép đối xứng S(D) qua trục D.

Đáp số

1) A. ☐ H(0; 6) B. ☐ H(6; 0)

C. ☐ H(2; –9) D. ☐ H(6; 6).

2) A. ☐ M'(3; 3) B. ☐ M'(2; 2)

C. ☐ M'(3; 2) D. ☐ M'(2; 3).

22. Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường thẳng D: $x - y - 1 = 0$.

Gọi D' là ảnh của D cho bởi phép đối xứng S(O) tâm O.

Hãy viết phương trình tổng quát của D'.

Đáp số

A. ☐ D': $x - y + 1 = 0$ B. ☐ D': $x + y - 1 = 0$

C. ☐ D': $x + y + 1 = 0$ D. ☐ Các đáp số trên đều sai.

23. Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường thẳng (d): $17x + 7y + 37 = 0$.

Tìm ảnh (d') của (d) trong phép đối xứng S(I) tâm $I\left(-1; -\frac{20}{7}\right)$.

Đáp số

A. ☐ (d'): $17x + 7y - 37 = 0$ B. ☐ (d'): $17x - 7y + 37 = 0$

C. ☐ (d'): $17x - 7y - 37 = 0$ D. ☐ (d'): $17x + 7y + 37 = 0$.

24. Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường thẳng D: $x + y - 1 = 0$ và điểm A(2; 2). Gọi D' là ảnh của D cho bởi phép đối xứng S(A) tâm A.

Hãy tìm phương trình của D'.

Đáp số

A. ☐ D': $x + y + 7 = 0$ B. ☐ D': $x + y - 7 = 0$

C. ☐ D': $x - y + 7 = 0$ D. ☐ D': $x - y - 7 = 0$.

25. Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường thẳng D: $x + y - 1 = 0$.

1) Gọi D' là ảnh của D cho bởi phép đối xứng S(Ox) qua trục hoành. Hãy viết phương trình tổng quát của D'.

2) Gọi D" là ảnh của D cho bởi phép đối xứng S(Oy) qua trục tung. Hãy viết phương trình tổng quát của D".

Đáp số

1) A. ☐ D': $x - y - 1 = 0$ B. ☐ D': $x - y + 1 = 0$

C. ☐ D': $x + y + 1 = 0$ D. ☐ Một đáp số khác.

2) A. ☐ D": $x - y + 1 = 0$ B. ☐ D": $x - y - 1 = 0$

C. ☐ D": $x + y + 1 = 0$ D. ☐ Một đáp số khác.

26. Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường thẳng D: $x + y - 1 = 0$.

Viết phương trình tổng quát của đường thẳng D', ảnh của đường thẳng D trong phép đối xứng S(Δ) qua trục Δ: $x + y - 2 = 0$.

Đáp số

A. ☐ D': $x + y + 1 = 0$ B. ☐ D': $x + y + 2 = 0$

C. ☐ D': $x - y - 2 = 0$ D. ☐ Các đáp số trên đều sai.

27. Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường thẳng L: $x - y - 1 = 0$.

Viết phương trình tổng quát của đường thẳng L', ảnh của đường thẳng L trong phép đối xứng S(Δ) qua đường thẳng Δ: $x + y - 1 = 0$

Đáp số

A. ☐ L': $x - y + 1 = 0$ B. ☐ L': $x + y + 1 = 0$

C. ☐ $L' \equiv \Delta$ D. ☐ $L' \equiv L$.

28. Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường thẳng L: $x - y - 1 = 0$.

Viết phương trình tổng quát của đường thẳng (T), ảnh của đường thẳng L trong phép đối xứng S(a) qua đường thẳng (a): $x - 2y - 1 = 0$.

Đáp số

A. ☐ (T): $x - 7y - 1 = 0$ B. ☐ (T): $3x - 8y + 3 = 0$

C. ☐ (T): $3x + 8y + 3 = 0$ D. ☐ (T): $3x + 8y - 3 = 0$.

29. Trong mặt phẳng (Oxy), cho hai đường thẳng:

$$\Delta_1: x - y - 1 = 0$$

$$\Delta_2: x - y + 3 = 0$$

1) Xác định phép đối xứng S(I) tâm I biến đường thẳng Δ_1 thành đường thẳng Δ_2.

2) Xác định phép đối xứng S(Δ) trục Δ biến Δ_1 thành Δ_2.

Đáp số

1) A. ☐ I(0; 2) B. ☐ I(0; –1)

C. ☐ I(0; 1) D. ☐ Các đáp số trên đều sai.

2) A. ☐ Δ: $x - y - 2 = 0$ B. ☐ Δ: $x - y - 1 = 0$

C. ☐ Δ: $x - y + 1 = 0$ D. ☐ Δ: $x - y = 0$.

30. Trong mặt phẳng (Oxy), cho ba điểm A(1; 2), B(9; 8), C(4; 6). Xác định các trục đối xứng D_1 và D_2 của hai đường thẳng AB và AC.

Đáp số

A. ☐ $\begin{cases} D_1: x - y + 1 = 0 \\ D_2: x + y - 3 = 0 \end{cases}$ B. ☐ $\begin{cases} D_1: x - y - 1 = 0 \\ D_2: x + y - 3 = 0 \end{cases}$

C. ☐ $\begin{cases} D_1: x - y + 1 = 0 \\ D_2: x + y + 3 = 0 \end{cases}$ D. ☐ Các đáp số trên đều sai.

31. Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường tròn (α): $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$.

1) Viết phương trình chính tắc của đường tròn (β), ảnh của đường tròn (α) trong phép đối xứng S(I) tâm I(2; 2).

2) Viết phương trình chính tắc của đường tròn (γ), ảnh của đường tròn (α) trong phép đối xứng S(O) tâm O.

Đáp số

1) A. ☐ (β): $(x - 2)^2 + (x + 2)^2 = 9$

B. ☐ (β): $(x + 2)^2 + (x - 2)^2 = 9$

C. ☐ (β): $(x + 2)^2 + (x + 2)^2 = 9$

D. ☐ (β): $(x - 2)^2 + (x - 2)^2 = 9$.

2) A. ☐ (γ): $(x + 2)^2 + (x + 2)^2 = 9$

B. ☐ $(x + 2)^2 + (x - 2)^2 = 9$

C. ☐ $(x - 2)^2 + (x + 2)^2 = 9$

D. ☐ $(x - 2)^2 + (x - 2)^2 = 9$.

32. Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$.

Viết phương trình chính tắc của đường tròn (C'), ảnh của đường tròn (C) trong phép đối xứng $\mathcal{S}(A)$ tâm A(1; −1).

Đáp số

A. ☐ (C'): $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$

B. ☐ (C'): $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$

C. ☐ (C'): $x^2 + (y - 1)^2 = 9$

D. ☐ (C'): $x^2 + y^2 = 9$.

33. Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường tròn (M): $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$.

1. Viết phương trình chính tắc của đường tròn (M_1) ảnh của đường tròn (M) trong phép đối xứng S(Ox) qua trục hoành Ox.
2. Viết phương trình chính tắc của đường tròn (M_2) ảnh của đường tròn (M) trong phép đối xứng S(Oy) qua trục tung Oy.

Đáp số

1. A. ☐ (M_1): $x^2 + y^2 = 4$

B. ☐ (M_1): $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$

C. ☐ (M_1): $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$

D. ☐ (M_1): $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

2. A. ☐ (M_2): $x^2 + y^2 = 4$

B. ☐ (M_2): $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$

C. ☐ (M_2): $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$

D. ☐ Đáp số khác.

34. Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường tròn (α): $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

1. Viết phương trình tổng quát của đường tròn (β), ảnh của đường tròn (α) trong phép đối xứng S(Δ) qua trục Δ: $y = x$.
2. Viết phương trình tổng quát của đường tròn (γ), ảnh của đường tròn (α) trong phép đối xứng S(Δ') qua trục Δ': $y = -x$.

Đáp số

1. A. ☐ (β): $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$

B. ☐ (β): $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

C. ☐ (β): $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$

D. ☐ (β): $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$.

2. A. ☐ $(\gamma): x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$

B. ☐ $(\gamma): x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$

C. ☐ $(\gamma): x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

D. ☐ $(\gamma): x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$.

35. Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường tròn (M):

$$x^2 + y^2 + 4x - 18y + 4 = 0.$$

Viết phương trình chính tắc của đường tròn (M'), ảnh của đường tròn (M) trong phép đối xứng $S(\Delta)$ qua trục Δ: $3x + 2y - 12 = 0$

Đáp số

A. ☐ $(M'): x^2 + y^2 + 4x - 8y - 16 = 0$

B. ☐ $(M'): x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$

C. ☐ $(M'): x^2 + y^2 + 4x + 6y - 23 = 0$

D. ☐ $(M'): x^2 + y^2 - 4x - 6y - 23 = 0$.

36. Trong mặt phẳng (Oxy), cho hai họ đường cong:

$$(\alpha_m): x^2 + y^2 - 4x - 2y - 2m - 4 = 0$$

$$(\beta_m): x^2 + y^2 - 4x - 4y + 2m - 5 = 0.$$

1. Với trị số nào của m thì (α_m) và (β_m) là hai đường tròn bằng nhau?
2. Trong trường hợp đó, hãy xác định tâm đối xứng I của chúng.

Đáp số

1. A. ☐ $m = 0$ B. ☐ $m = 2$

C. ☐ $m = 4$ D. ☐ Một trị số khác.

2. A. ☐ $I\left(2; \frac{3}{2}\right)$ B. ☐ $I(2; 1)$

C. ☐ $I\left(-2; -\frac{3}{2}\right)$ D. ☐ Một điểm khác.

37. Trong mặt phẳng (Oxy), cho hai họ đường cong:

$$(\alpha_m): x^2 + y^2 + 4x - 4y - m^2 = 0$$

$$(\beta_m): x^2 + y^2 - 4x + 4y - m^2 = 0.$$

1. Với trị số nào của m thì (α_m) và (β_m) là hai đường tròn bằng nhau.
2. Xác định trục đối xứng Δ của hai đường tròn đó.

Đáp số

1. A. ☐ $m = 0$ B. ☐ $m = 1$

C. ☐ $m \in R$ D. ☐ $m \in \varnothing$.

2. A. ☐ $\Delta: x + y - 1 = 0$ B. ☐ $\Delta: x - y - 1 = 0$

C. ☐ $\Delta: y = 0$ D. ☐ $\Delta: y = -x$.

38. Trong mặt phẳng (Oxy), cho điểm A(2; 1). Hãy xác định điểm A'(x; y), ảnh của điểm A trong phép vị tự H(O; k) tâm O.

1. Có tỉ số k = 2.

2. Có tỉ số k = −2.

Đáp số

1. A. ☐ A'(4; 2) B. ☐ A'(2; 4)

C. ☐ A'(4; −2) D. ☐ A'(−4; −2).

2. A. ☐ A'(4; 2) B. ☐ A'(2; 4)

C. ☐ A'(−4; −2) D. ☐ A'(4; −2).

39. Trong mặt phẳng (Oxy), cho hai điểm I(2; 1) và A(4; 2).

Hãy xác định điểm A'(x; y), ảnh của điểm A trong phép vị tự H(I; k) tâm I.

1. Có tỉ số k = 2.

2. Có tỉ số $k = -\dfrac{1}{2}$.

Đáp số

1. A. ☐ A'(6; 4) B. ☐ A'(6; 3)

C. ☐ A'(6; 2) D. ☐ A'(6; 1)

2. A. ☐ $A'\left(-1; -\dfrac{1}{2}\right)$ B. ☐ $A'\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$

C. ☐ A'(−1; −2) D. ☐ A'(−2; −1).

40. Trong mặt phẳng (Oxy), cho A(−2; 0) và B(2; 0); M(x; y) là một điểm di động trên đường tròn (O; 2); M'(x'; y') là điểm đối xứng của A qua M.

1. Tính x', y' theo x, y.

2. Tìm tập hợp (T) các điểm M'.

Đáp số

1\. A. ☐ $\begin{cases} x' = 2(x+1) \\ y' = 2y \end{cases}$ B. ☐ $\begin{cases} x' = 2(x-1) \\ y' = 2y \end{cases}$

C. ☐ $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2(y+1) \end{cases}$ D. ☐ $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2(y-1) \end{cases}$

2\. A. ☐ (T) là đường thẳng $y = x - 2$.

B. ☐ (T) là đường thẳng $y = x + 2$.

C. ☐ (T) là đường tròn tâm A, bán kính $R = 4$.

D. ☐ T là đường tròn tâm B, bán kính $R = 4$.

41. Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường tròn (α) tâm P, bán kính $R = 1$, tiếp xúc với trục tung tại O, có đường kính AB song song với trục tung.

Gọi (β) là đường tròn tâm Q di động tiếp xúc với đoạn AB (I và cung AOB của đường tròn (α) ở J.

Đường thẳng IJ đi qua điểm cố định K. Hãy xác định K.

Đáp số

A. ☐ K(1; 0) B. ☐ K(–1; 0)

C. ☐ K(–2; 0) D. ☐ K(2; 0).

42. Trong mặt phẳng (Oxy), cho ba điểm A(1; 0); B(0; 2a); A'(-1; 0) với $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. M(b; 0) là một điểm di động trên trục Ox.

Đường thẳng qua M và song song với A'B cắt AB ở C; đường thẳng qua M và song song với AB cắt A'B ở D.

1. Trong phép vị tự H_1 tâm A biến điểm A' thành điểm M, tìn tọa độ ảnh B_1 của điểm B.
2. Trong phép vị tự H_2 tâm A' biến điểm A thành điểm M, tìn tọa độ ảnh B_2 của điểm B.

Đáp số

1\. A. ☐ $B_1 \begin{cases} x = \dfrac{b-1}{2} \\ y = a(1-b) \end{cases}$ B. ☐ $B_1 \begin{cases} x = \dfrac{b+1}{2} \\ y = a(1-b) \end{cases}$

C. ☐ $B_1 \begin{cases} x = a(1-b) \\ y = \dfrac{b+1}{2} \end{cases}$ D. ☐ Một điểm khác.

2. A. ☐ $B_2\begin{cases} x = \dfrac{b+1}{2} \\ y = a(b+1) \end{cases}$

B. ☐ $B_2\begin{cases} x = \dfrac{b-1}{2} \\ y = a(b+1) \end{cases}$

C. ☐ $B_2\begin{cases} x = a(b+1) \\ y = \dfrac{b-1}{2} \end{cases}$

D. ☐ Một điểm khác.

43. Trong mặt phẳng (Oxy), cho hai đường tròn:

(α); $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

(β): $x^2 + y^2 - 14x + 48 = 0$.

1. Gọi I là tâm của phép vị tự thuận biến đường tròn (α) thành đường tròn (β). Hãy xác định I.
2. Gọi J là tâm của phép vị tự nghịch biến đường tròn (α) thành đường tròn (β). Hãy xác định J.

Đáp số

1. A. ☐ I(9; 0) B. ☐ I(11; 0)
   C. ☐ I(13; 0) D. ☐ Một điểm khác.
2. A. ☐ J(4; 0) B. ☐ J(5; 0)
   C. ☐ J(6; 0) D. ☐ Một điểm khác.

44. Trong mặt phẳng (Oxy), phép quay $R(I;\theta)$ biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y').

1. Xác định M'.
2. Xác định M' trong trường hợp tâm quay I trùng với điểm gốc tọa độ O.

Đáp số

1. A. ☐ $\begin{cases} x' = x_I + (x - x_I)\cos\theta - (y - y_I)\sin\theta \\ y' = y_I + (x - x_I)\sin\theta + (y - y_I)\cos\theta \end{cases}$

B. ☐ $\begin{cases} x' = x_I - (x - x_I)\cos\theta - (y - y_I)\sin\theta \\ y' = y_I - (x - x_I)\sin\theta + (y - y_I)\cos\theta \end{cases}$

C. ☐ $\begin{cases} x' = x_I + (x - x_I)\cos\theta + (y - y_I)\sin\theta \\ y' = y_I + (x - x_I)\sin\theta - (y - y_I)\cos\theta \end{cases}$

D. ☐ $\begin{cases} x' = x_I + x \\ y' = y_I + y \end{cases}$

2. A. ☐ $\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$

B. ☐ $\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$

C. ☐ $\begin{cases} x' = x\sin\theta - y\cos\theta \\ y' = x\cos\theta - y\sin\theta \end{cases}$

D. ☐ $\begin{cases} x' = x\cos\theta \\ y' = y\sin\theta \end{cases}$

45. Trong mặt phẳng (Oxy), cho điểm A(1; 1).

1. Xác định điểm A_1, ảnh của điểm A trong phép quay $R\left(O; \frac{\pi}{2}\right)$ tâm O, góc quay $\theta = \frac{\pi}{2}$.

2. Xác định điểm A_2, ảnh của điểm A trong phép quay $R\left(I; \frac{\pi}{3}\right)$ tâm I(0; 1), góc quay $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Đáp số

1. A. ☐ $A_1(-1; 1)$ B. ☐ $A_1(-1; -1)$

C. ☐ $A_1(1; -1)$ D. ☐ Một điểm khác.

2. A. ☐ $A_2\left(\frac{1}{2}; 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ B. ☐ $A_2\left(-\frac{1}{2}; 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

C. ☐ $A_2\left(\frac{1}{2}; 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ D. $A_2\left(-\frac{1}{2}; 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

46. Trong mặt phẳng (Oxy), phép biến hình f biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') xác định như sau:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} - \dfrac{y}{2} \\ y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Hỏi f là phép biến hình nào?

Đáp số

A. ☐ f là phép quay $R\left(O; -\frac{\pi}{6}\right)$

B. ☐ f là phép quay $R\left(O; \frac{\pi}{6}\right)$

C. ☐ f là phép quay $R\left(O; \frac{\pi}{3}\right)$

D. ☐ f là phép quay $R\left(O; -\frac{\pi}{3}\right)$.

47. Hỏi phép quay $R\left(O; \frac{\pi}{2}\right)$ biến đường thẳng D: $y = x$ thành đường thẳng D' nào?

Đáp số

A. ☐ D': $y = -x - 1$ B. ☐ D': $y = -x + 1$

C. ☐ D': $y = x$ D. ☐ D': $y = -x$.

48. Hỏi phép quay $R\left(I; \frac{\pi}{2}\right)$ với I(1; 0) biến đường thẳng Δ: $x + y - 1 = 0$ thành đường thẳng Δ' nào?

Đáp số

A. ☐ Δ': $x - y - 1 = 0$

B. ☐ Δ': $x - y + 1 = 0$

C. ☐ Δ': $x - y - 2 = 0$

D. ☐ Δ': $x - y + 2 = 0$.

49. Phép quay $R\left(O; \frac{\pi}{2}\right)$ biến đổi đường thẳng D: $x - y - 1 = 0$ thành đường thẳng D' nào?

Đáp số

A. ☐ D': $x + y + 1 = 0$

B. ☐ D': $x + y - 1 = 0$

C. ☐ D'; $x + y + 2 = 0$

D. ☐ D': $x + y - 2 = 0$.

50. Phép quay $R\left(I;\dfrac{\pi}{2}\right)$ với I(0; 6) biến đường thẳng Δ: $2x - 3y + 18 = 0$ thành đường thẳng Δ' nào?

Đáp số

A. ☐ Δ': $3x + 2y - 12 = 0$

B. ☐ Δ': $3x + 2y - 18 = 0$

C. ☐ Δ': $3x + 2y + 12 = 0$

D. ☐ Một đường thẳng khác.

51. Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$. Viết phương trình tổng quát đường tròn (C'), ảnh của đường tròn (C) trong phép quay $R\left(O;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Đáp số

A. ☐ (C'): $x^2 + y^2 - 2 = 0$

B. ☐ (C'): $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x = 0$

C. ☐ (C'): $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{y} = 0$

D. ☐ (C'): $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}y = 0$.

52. Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + y - 1 = 0$. Viết phương trình tổng quát của đường tròn (C') ảnh của đường tròn (C) trong phép quay $R\left(I;\dfrac{\pi}{2}\right)$ với I(1; 0).

Đáp số

A. ☐ (C'): $x^2 + y^2 - 3y = 0$

B. ☐ (C'): $x^2 + y^2 - 3x = 0$

C. ☐ (C'): $x^2 + y^2 - 3x - 3y = 0$

D. ☐ Một đường tròn khác.

53. Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$. Hãy viết phương trình tổng quát của đường tròn (C') ảnh của đường tròn (C) trong phép quay $R\left(O;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Đáp số

A. ☐ (C'): $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$

B. ☐ (C'): $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

C. ☐ (C'): $x^2 + y^2 - 4x = 0$

D. ☐ (C'): $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

54. Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$. Viết phương trình tổng quát của đường tròn (C') ảnh của đường tròn (C) trong phép quay $R\left(O; -\frac{\pi}{2}\right)$.

Đáp số

A. ☐ (C'): $x^2 + y^2 - 2x = 0$

B. ☐ (C'): $x^2 + y^2 - 2y = 0$

C. ☐ (C'): $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$

D. ☐ (C'): $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$.

55. Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 4 = 0$. Viết phương trình tổng quát của đường tròn (C') ảnh của đường tròn (C) trong phép quay $R\left(I; \frac{\pi}{2}\right)$ với I(1; 1).

Đáp số

A. ☐ (C'): $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$

B. ☐ (C'): $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 4 = 0$

C. ☐ (C'): $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$

D. ☐ (C'): $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$.

56. Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$. Viết phương trình tổng quát của đường tròn (C') ảnh của đường tròn (C).

1. Trong phép quay $R\left(I; \text{[illegible]}\right)$.

2. Trong phép quay $R\left(I; \frac{\pi}{4}\right)$ với I(1; 1).

Đáp số

1. A. ☐ (C'): $x^2 + y^2 + (2 + \sqrt{2})x + (2 + \sqrt{2})y + 2 + 2\sqrt{2} = 0$

   B. ☐ (C'): $x^2 + y^2 - (2 + \sqrt{2})x - (2 + \sqrt{2})y + 2 + 2\sqrt{2} = 0$

C. ☐ (C'): $x^2 + y^2 - (2 + \sqrt{2})x + (2 + \sqrt{2})y + 2 + 2\sqrt{2} = 0$

D. ☐ Một đường tròn khác.

2. A. ☐ (C'): $x^2 + y^2 - (2 + \sqrt{2})x + \frac{1}{2} + \sqrt{2} = 0$

B. ☐ (C'): $x^2 + y^2 - (2 + \sqrt{2})x - \frac{1}{2} - \sqrt{2} = 0$

C. ☐ (C'): $x^2 + y^2 + (2 + \sqrt{2})x + \frac{1}{2} - \sqrt{2} = 0$

D. ☐ Một đường tròn khác.

57. Trong mặt phẳng (Oxy).

1. Phép biến f biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') xác định như sau:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

Hãy xác định f.

2. Phép biến hình g biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') xác định như sau:

$$\begin{cases} x' = (x + y)\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = (-x + y)\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Hãy xác định g.

Đáp số

1. A. ☐ f là phép quay $R\left(O; \frac{\pi}{2}\right)$

B. ☐ f là phép quay $R\left(O; -\frac{\pi}{2}\right)$

C. ☐ f là phép vị tự $R\left(O; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

D. ☐ f là phép vị tự $R\left(O; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. A. ☐ g là phép quay $R\left(O; \frac{\pi}{4}\right)$

B ☐ g là phép quay $R\left(O; -\frac{\pi}{4}\right)$

C. ☐ g là phép quay $H\left(O; \frac{\pi}{2}\right)$

D. ☐ g là phép quay $H\left(O; -\frac{\pi}{2}\right)$.

58. Trong mặt phẳng (Oxy), cho điểm Q(2; 2) là ảnh của điểm P trong phép quay $R\left(O; \frac{\pi}{6}\right)$. Hãy xác định P.

Đáp số

A. ☐ $P(\sqrt{3} - 1; \sqrt{3} + 1)$
B. ☐ $P(-\sqrt{3} - 1; -\sqrt{3} + 1)$
C. ☐ $P(-\sqrt{3} - 1; \sqrt{3} + 1)$
D. ☐ $P(\sqrt{3} + 1; \sqrt{3} - 1)$.

59. Trong mặt phẳng (Oxy), cho $\vec{V} = (2; 1)$. Phép quay $R\left(O; \frac{\pi}{2}\right)$ biến $\vec{V}$ thành $\vec{V}'$. Hãy xác định các tọa độ của $\vec{V}'$.

A. ☐ $\vec{V}' = (-1; 2)$
B. ☐ $\vec{V}' = (-1; -2)$
C. ☐ $\vec{V}' = (1; -2)$
D. ☐ $\vec{V}' = (1; 2)$

60. Trong mặt phẳng (Oxy), cho điểm A(2; 0).

1. Xác định vị trí của điểm A', ảnh của điểm A trong phép đồng dạng $Si\left(O; 2; -\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Xác định vị trí của điểm A", ảnh của điểm A trong phép đồng dạng $Si\left(O; 2; \frac{\pi}{4}\right)$.

Đáp số

1. A. ☐ A'(0; −2) B. ☐ A'(0; 4)
C. ☐ A'(4; 0) D. ☐ A'(−4; 0).

2. A. ☐ A"($2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$)

B. ☐ A"($2\sqrt{2}$; $-2\sqrt{2}$)

C. ☐ A"($-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$)

D. ☐ A"($-2\sqrt{2}$; $-2\sqrt{2}$).

61. Trong mặt phẳng (Oxy), cho hai điểm I(1; 1) và A(3; 3).

1. Xác định vị trí của điểm A', ảnh của điểm A trong phép đồng dạng $Si\left(I; 2; \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Xác định vị trí của điểm A", ảnh của điểm A trong phép đồng dạng $Si\left(I; 2; -\frac{\pi}{4}\right)$.

Đáp số

1. A. ☐ A'(–3; –5) B. ☐ A'(–3; 5)

C. ☐ A'(3; –5) D. ☐ Một điểm khác.

2. A. ☐ A"($1 - 4\sqrt{2}$; 1) B. ☐ A"($1 + 4\sqrt{2}$; –1)

C. ☐ A"($1 + 4\sqrt{2}$; 1) D. ☐ Một điểm khác.

62. Trong mặt phẳng (Oxy) cho hai điểm I(1; 1) và A(3; 1).

1. Xác định vị trí của điểm A', ảnh của điểm A trong phép đồng dạng $Si\left(I; 2; \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Xác định vị trí của điểm A", ảnh của điểm A trong phép đồng dạng $Si\left(I; 2; -\frac{\pi}{4}\right)$.

Đáp số

1. A. ☐ A'(1; 5)

B. ☐ A'(1; –5)

C. ☐ A'(–1; 5)

D. ☐ A'(–1; –5).

2. A. ☐ A"($1 + 2\sqrt{2}$; $1 - 2\sqrt{2}$)

B. ☐ A"($1 - 2\sqrt{2}$; $1 + 2\sqrt{2}$)

C. ☐ A"($-1 + 2\sqrt{2}$; $-1 - 2\sqrt{2}$)

D. ☐ A"($-1 - 2\sqrt{2}$; $-1 + 2\sqrt{2}$).

63. Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$.

1. Viết phương trình tổng quát của đường tròn (C'), ảnh của đường tròn (C) trong phép đồng dạng $Si\left(O; 2; -\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Viết phương trình tổng quát của đường tròn (C"), ảnh của đường tròn (C) trong phép đồng dạng $Si\left(O; 2; \frac{\pi}{4}\right)$.

Đáp số

1. A. ☐ (C'): $x^2 + y^2 + 8x - 12 = 0$
   B. ☐ (C'): $x^2 + y^2 + 8x + 12 = 0$
   C. ☐ (C'): $x^2 + y^2 + 8y + 12 = 0$
   D. ☐ (C'): $x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$.
2. A. ☐ (C"): $x^2 + y^2 - 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y + 12 = 0$
   B. ☐ (C"): $x^2 + y^2 + 4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 12 = 0$
   C. ☐ (C"): $x^2 + y^2 - 4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 12 = 0$
   D. ☐ Một đường tròn khác.

64. Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường tròn (α): $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$ và điểm I(1; 1).

1. Viết phương trình tổng quát của đường tròn (α'), ảnh của đường tròn (α) trong phép đồng dạng $Si\left(O; 2; -\frac{\pi}{4}\right)$.

2. Viết phương trình tổng quát của đường tròn (α"), ảnh của đường tròn (α) trong phép đồng dạng $Si\left(O; 2; \frac{\pi}{2}\right)$.

Đáp số

1. A. ☐ (α'): $x^2 + y^2 + 2(1 + 2\sqrt{2})x + 2(1 + 2\sqrt{2})y + 14 = 0$
   B. ☐ (α'): $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 22 = 0$
   C. ☐ (α'): $x^2 + y^2 - 2(1 + 2\sqrt{2})x - 2(1 + 2\sqrt{2})y + 14 = 0$
   D. ☐ (α'): $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 22 = 0$.
2. A. ☐ (α"): $x^2 + y^2 + 2(1 + 2\sqrt{2})x + 2(1 - 2\sqrt{2})y + 14 = 0$
   B. ☐ (α"): $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 22 = 0$
   C. ☐ (α"): $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 22 = 0$
   D. ☐ (α"): $x^2 + y^2 - 2(1 + 2\sqrt{2})x - 2(1 - 2\sqrt{2})y + 14 = 0$.

65. Trong mặt phẳng (Oxy), cho điểm I(1; 1) và đường tròn (β):

$$x^2 + y^2 - 6x + 6y + 17 = 0.$$

1. Viết phương trình tổng quát của đường tròn (β'), ảnh của đường tròn (β) trong phép đồng dạng $\text{Si}\left(I; 2; \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Viết phương trình tổng quát của đường tròn (β"), ảnh của đường tròn (β) trong phép đồng dạng $\text{Si}\left(I; 2; -\frac{\pi}{4}\right)$.

1. A. ☐ (β'): $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 30 = 0$
   B. ☐ (β'): $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 30 = 0$
   C. ☐ (β'): $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$
   D. ☐ (β'): $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 30 = 0$.

2. A. ☐ (β"): $x^2 + y^2 - 2(1 + 4\sqrt{2})x + 2y + 30 + 8\sqrt{2} = 0$
   B. ☐ (β"): $x^2 + y^2 + 2(1 + 4\sqrt{2})x + 2y + 30 + 8\sqrt{2} = 0$
   C. ☐ (β"): $x^2 + y^2 - 2(1 + 4\sqrt{2})x - 2y + 30 + 8\sqrt{2} = 0$
   D. ☐ Một đường tròn khác.

66. Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường thẳng D: $x - y - 1 = 0$.

1. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng D_1, ảnh của đường thẳng D trong phép đồng dạng $\text{Si}\left(O; 2; \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng D_2, ảnh của đường thẳng D trong phép đồng dạng $\text{Si}\left(O; 2; \frac{\pi}{4}\right)$.

3. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng D_3, ảnh của đường thẳng D trong phép đồng dạng $\text{Si}\left(O; 2; -\frac{\pi}{4}\right)$.

Đáp số

1. A. ☐ D_1: $x + y - 2 = 0$ B. ☐ D_1: $x - y + 2 = 0$
   C. ☐ D_1: $x + y + 2 = 0$ D. ☐ D_1: $x - y - 2 = 0$.
2. A. ☐ D_2: $x = 2$ B. ☐ D_2: $x = \sqrt{2}$
   C. ☐ D_2 : $x = -\sqrt{2}$ D. ☐ D_2: $x = -2$.
3. A. ☐ D_3: $x = 2$ B. ☐ D_3: $x = \sqrt{2}$
   C. ☐ D_3 : $x = -\sqrt{2}$ D. ☐ D_3: $x = -2$.

TRẢ LỜI TRẮC NGHIỆM

1. D.

Ta có: $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = x_M + a \\ y_{M'} = y_M + b \end{cases}$$

2. C.

3. C. $\vec{V} = (1; 2)$.

4. A.

5. D. ($\vec{V} = (1; 2)$).

6. (1B; 2D).

7. D ($\vec{V} = \overrightarrow{OO'}$).

8. C **9.** C **10.** C **11.** C **12.** C **13.** B.

14. (1C; 2B).

1. Ta có: D' // D.

D cắt Ox tại A(2; 0). Tìm ảnh A' của A trong phép tịnh tiến T($\vec{V}$).

D qua A' và song song với D.

2. Ta có: (C') = (C)

(C) có tâm I(2; –2), bán kính R = 3

$\Rightarrow$ (C') có tâm I' ảnh của I trong C($\vec{V}$), bán kính R' = 3 $\Rightarrow$ đpcm.

15. C.

16. C.

17. D ($\vec{V} = (2; -2)$).

Tìm các giao điểm A, B của đường thẳng D với các đường thẳng Δ, Δ'.

$\vec{V}$ có giá song song với D, biến Δ thành Δ' nên biến A thành B.

Suy ra: $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$.

18. (1C; 2D).

19. (1A; 2B).

20. (1C; 2B).

Ta biết rằng:

+ Hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng y = x thì hoành độ điểm này bằng tung độ điểm kia và ngược lại. Ta có:

$$M \xmapsto{T(\Delta: y=x)} M'$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = y_M \\ y_{M'} = x_M \end{cases}$$

+ Tương tự, ta có:

$$M \xmapsto{S(\Delta: y=-x)} M'$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = -y_M \\ y_{M'} = -x_M \end{cases}$$

21. (1A; 2D).

1. Viết phương trình đường thẳng D' đi qua M và vuông góc với D.

$3(x + 2) + 2(y - 9) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y - 12 = 0.$

Giải hệ:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 18 = 0 \\ 3x + 2y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow H.$$

2. H là trung điểm của MM'.

22. A.

Ta có: D' // D.

Hai điểm đối xứng nhau qua điểm gốc O thì có hoành độ đối nhau, tung độ đối nhau.

D cắt Ox tại điểm A(1; 0)

Xác định A', đối xứng của A qua O.

D' qua A' và song song với D.

23. D. Nhận xét: $I \in (d)$.

24. B Xác định M', ảnh của $M(1; 0) \in D$.

25. (1A; 2A).

Nhắc lại

$$M(x; y) \xmapsto{S(Ox)} M'(x; -y)$$

$$M(x; y) \xmapsto{S(Oy)} M'(-x; y)$$

26. D.

(D': $x + y - 3 = 0$).

Nhận xét rằng D // Δ ⇒ D' // Δ.

Xác định điểm A' ảnh của điểm $A(1; 0) \in D$ trong phép đối xứng $S(\Delta)$.

D' đi qua A' và song song với Δ.

27. D.

Nhận xét rằng $L \perp \Delta$.

28. A.

Đường thẳng L và (a) cắt nhau tại I(1; 0).

Lấy điểm $A(2; 1) \in L$.

Xác định điểm A' đối xứng của A qua (a).

(T) là đường thẳng qua I và A'.

29. (1D; 2C).

Nhận xét $\Delta_1 // \Delta_2$.

1. Ta có: $d(I; \Delta_1) = d(I; \Delta_2)$.

   Có vô số điểm I cách đều Δ_1 và Δ_2.

2. Δ qua một trong các điểm I và song song với Δ_1, Δ_2.

30. A. Trục đối xứng của hai đường thẳng AB và AC là các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng AB và AC.

** Cách 1:*

+ Viết phương trình các đường thẳng AB và AC:

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (8; 6) \Rightarrow AB = 10$

$\overrightarrow{AC} = (3; 4) \Rightarrow AC = 5.$

Phương trình AB:

$$\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{6} \Leftrightarrow 3x - 4y + 5 = 0.$$

Phương trình cạnh AC:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} \Leftrightarrow 4x - 3y + 2 = 0.$$

Gọi M(x; y) là một điểm nằm trên các đường phân giác của góc (AB, AC). Ta có:

$$d(M; AB) = d(M; AC)$$

$$\Leftrightarrow \frac{|3x - 4y + 5|}{5} = \frac{|4x - 3y + 2|}{5}$$

$$\Leftrightarrow x - y + 1 = 0 \vee x + y - 3 = 0.$$

* *Cách 2:* Gọi I và J theo thứ tự là chân các đường phân giác trong và ngoài của góc BAC.

Ta có: $\frac{IB}{IC} = \frac{JB}{JC} = \frac{AB}{AC} = \frac{10}{5} = 2$

$\Rightarrow \overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{BJ} = -2\overrightarrow{JC}$

$\Rightarrow I\left(\frac{17}{3}; \frac{20}{3}\right)$; $J(-1; 4)$.

Viết phương trình AI và AJ, ta có phương trình các trục đối xứng D_1 và D_2 của các đường thẳng AB và AC.

31. (1D; 2A).

1. Đường tròn (α) có tâm $I(2; 2)$, bán kính $R = 3$.

   Trong phép đối xứng S(I) tâm I, (α) bất biến. Suy ra (β) trùng với (α).

2. Gọi I' là ảnh của $I(2; 2)$ trong phép đối xứng S(O) tâm O

   $\Rightarrow I'(-2; -2)$

   $\Rightarrow$ Đường tròn (γ) có tâm là điểm I' và có bán kính $R' = R = 3 \Rightarrow$ phương trình (γ).

32. D.

33. (1C; 2C).

1. Đường tròn (M) có tâm $I(1; 1)$ và có bán kính $R = 2$.

   Đường tròn (M_1) có tâm $I_1(1; -1)$ và có bán kính $R_1 = 2 \Rightarrow$ phương trình (M_1).

2. Đường tròn (M_2) có tâm $I_2(-1; 1)$ và có bán kính $R_2 = R = 2 \Rightarrow$ phương trình (M_2).

34. (1C; 2A).

1. Tâm đường tròn (β): $I(2; 1)$.

2. Tâm đường tròn (γ): $J(-2; -1)$.

35. D.

36. (1D; 2A).

1. $\sqrt{2m + 9} = \sqrt{13 - 2m} \Rightarrow m = 1$.

2. Tâm đối xứng của hai đường tròn bằng nhau là trung điểm của đoạn nối tâm hai đường tròn.

37. (1C; 2C).

Trục đối xứng của hai đường tròn bằng nhau là trung trực của đoạn nối tâm hai đường tròn.

38. (1A; 2C).

1. Ta có: $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA}$.
2. Ta có: $\overrightarrow{OA'} = -2\overrightarrow{OA}$.

39. (1B; 2B).

1. Ta có: $\overrightarrow{IA'} = 2\overrightarrow{IA}$.
2. Ta có: $\overrightarrow{IA'} = -2\overrightarrow{IA}$.

40. (1A; 2D).

41. D.

Chứng minh K là ảnh của I trong phép vị tự H tâm J.

42. (1B; 2B).

43. (1C; 2B).

(α) có tâm H(1; 0) và có bán kính R = 2.

(β) có tâm H'(7; 0) và có bán kính R' = 1.

1. Ta có: $\dfrac{IH'}{JH} = \dfrac{R'}{R} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{HI} = -2\overrightarrow{HI'} \Rightarrow I$.
2. Ta có: $\overrightarrow{HJ} = 2\overrightarrow{JH'} \Rightarrow J(5, 0)$.

44. A.

45. (1A; 2C): Vận dụng công thức (bài 44).

46. B.

Dựa vào công thức (bài 44)

Nhận xét: $x_1 = 0$; $y_1 = 0 \Rightarrow I \equiv O$.

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta.$$

47. D. Điểm O bất biến.

48. A. Điểm I bất biến.

49. B.

50. A.

51. D. Xác định ảnh I' của tâm I(1; 1) đường tron (C) trong phép quay $R\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

52. B. $C\left(1;-\frac{1}{2}\right) \longmapsto C'\left(\frac{3}{2};0\right)$.

53. A. $C(2; 0) \longmapsto C'(0; 2)$.

54. D. $C(1; 1) \longmapsto C'(1; -1)$.

55. C. $C(2; 1) \longmapsto C'(1; 2)$.

56. (1B; 2A).

57. (1B; 2B).

58. D.

59. A.

60. (1A; 2A).

1. Gọi A_1 là ảnh của $A(2; 0)$ trong phép vị tự $H(O; 2)$ tâm O tỉ số $k = 2$.

   $\Rightarrow A_1(4; 0) \Rightarrow A'(0; -4)$.

2. A" là ảnh của A_1 trong phép quay $\left(0;\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow A''(2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$.

61. (1B; 2C).

1. Gọi A_1 là ảnh của $A(3; 3)$ trong phép vị tự $H(I; 2)$ tâm $I(1; 1)$ tỉ số $k = 2$.

   $\Rightarrow A_1(5; 5) \Rightarrow A'(-3; 5)$.

2. A" là ảnh của A_1 trong phép quay $R\left(I;-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow A''(1 + 4\sqrt{2}; 1)$.

62. (1A; 2A).

63. (1C; 2C).

1. Thực hiện phép vị tự trước:

   $C(2; 0) \longmapsto C_1(4; 0)$.

   Thực hiện tiếp phép quay:

   $C_1(4; 0) \longmapsto C'(0; -4) \Rightarrow (C')$.

2. Tương tự.

64. (1C; 2C).

65. (1B; 2C).

66. (1A; 2B; 3B).

MỤC LỤC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội

Điện thoại: (04) 9724852; (04) 9724770; Fax: (04) 9714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc	: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập	: NGUYỄN BÁ THÀNH
Biên tập	: Hoàng Tiến, Minh Hải
Sửa bài	: Trần Hưng
Chế bản	: NS. Hồng Ân
Trình bày bìa	: Ngọc Anh

PHÉP DỜI HÌNH TRONG MẶT PHẲNG

Mã số: 1L-162 ĐH2007

In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24cm. Tại Công ty TNHH in bao bì Phong Tân.

Số xuất bản: 542-2007/CXB/06-82/ĐHQGHN, ngày 19/7/2007.

Quyết định xuất bản số: 362 LK/XB

In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2007.